Institut Teknologi Bandung
Program Tahap Persiapan Bersama

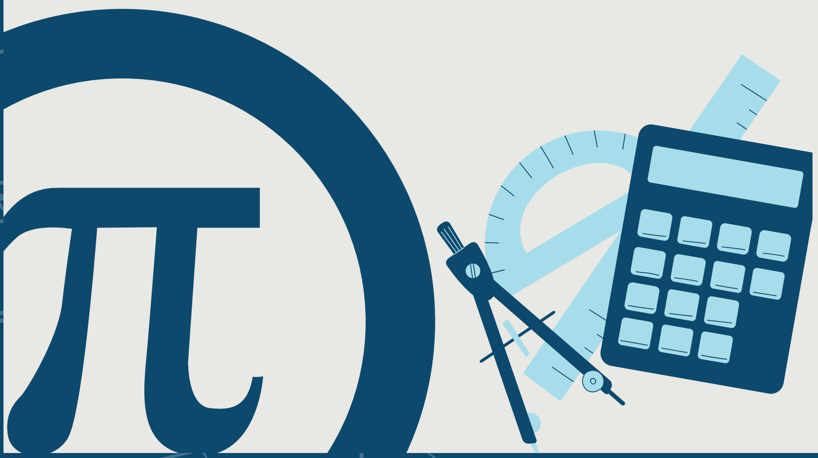
Student Center for Learning

MATEMATIKA IA

Student Center for Learning

Tim Penyusun

Eka Rahmi Kahar, S.Si., M.Si.
Risky Yoga Suratman, S,Pd., M.Sc.
Ida Bagus Pranadya B., S.Si., M.Si



DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

BAB 0
PENDAHULUAN

0.1 Operasi Bilangan Real

Rangkuman Materi 0.1

Bilangan Asli ($\mathbb{N}$) : $\{1, 2, 3, 4, 5, \ \ldots\}$

Bilangan Bulat ($\mathbb{Z}$) : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ \ldots\}$

Bilangan Rasional ($\mathbb{Q}$) : Bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk $^m/_n$, dengan m dan n bilangan bulat, serta n $\neq$ 0.

Bilangan Real ($\mathbb{R}$) : Semua bilangan (Rasional dan Irasional) yang dapat mengukur panjang, beserta negatif dari bilangan-bilangan tersebut, dan nol.

Bilangan Irasional : Bilangan Real yang bukan Bilangan Rasional (contoh: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, π).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Operasi pada bilangan real sebagai berikut:

Misalkan a, b, c, dan $d \in \mathbb{R}$ berlaku

1. Jika $a = b$, maka $a + c = b + c$ dan $ac = bc$.
2. Hukum Pencoretan untuk Penjumlahan:Jika $a + c = b + c$, maka $a = b$.
3. Hukum Pencoretan untuk Perkalian: Jika $ac = bc$ da $c \neq 0$, maka $a = b$.
4. $-(-a) = a$ dan $(a^{-1})^{-1} = a, a \neq 0$.
5. Sifat Distribusi: $a(b + c) = ab + bc$.
6. $a \times 0 = 0 \times a = 0$.
7. $a(-b) = (-a)b = -ab$; khususnya $(-1)a = -a$.
8. $(-a)(-b) = ab$.
9. Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.
10. Rumus Perkalian Silang: Jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0$ dan $d \neq 0$, maka $ad = bc$.
11. Jika $b \neq 0$, dan $d \neq 0$, maka $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b \times d}$ dan $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times b}{b \times d}$

Latihan Soal

Untuk soal nomor 1-16, sederhanakan bentuk-bentuk berikut.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$
2. $3(2 - 4(7 - 12))$
3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$
4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$
5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$
6. $\frac{3}{4-7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$
7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$
8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$
9. $\frac{14}{21}\left(\frac{2}{5-\frac{1}{3}}\right)^2$
10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$
11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$
12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$
13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$
14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$
15. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
16. $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

Untuk soal nomor 17-29, tentukan solusi dari persamaan berikut.

17. $2x + 5 = 0$
18. $3x + 4 = 8$
19. $6y - 8 = 6$
20. $y - 7 = 10$
21. $x + 2 = 10 - 2x$
22. $4x = 5x - 7$
23. $3x + 8 = 7x + 1$
24. $33y = 17y - 7$
25. $3(x + 6) = x + 2$
26. $6x - (2x - 9) = 11$
27. $9x - 2(3x + 5) = 2$
28. $7(x - 2) = 4(x - 5)$
29. $8x + 4(3 + x) = 2(5x + 4)$

0.2 Menjabarkan/Menyederhanakan Ekspresi Matematika Sederhana

Rangkuman Materi 0.2

Rumus Perkalian Istimewa dan Pemfaktoran

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2$
4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^2$
5. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (-x-y)(-x+y)$
6. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
7. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
8. Faktorisasi Bentuk Kuadrat:

   $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$ dengan $pq = ac$ dan $p+q = b$.

   Apabila $a = 1$, maka $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$ dengan $pq = c$ dan $p+q = b$.

Latihan Soal

Untuk soal nomor 1-12, lakukan operasi yang diminta dan sederhanakan.

1. $(3x-4)(x+1)$

2. $(2x-3)^2$

3. $(3x-9)(2x+1)$

4. $(4x-11)(3x-7)$

5. $(3t^2 - t + 2)^2$

6. $(2t+3)^3$

7. $\frac{x^2-4}{x-2}$

8. $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

9. $\frac{t^2-4t-21}{t+3}$

10. $\frac{2x-2x^2}{x^3-2x^2+x}$

11. $\frac{12}{x^2+2x} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x+2}$

12. $\frac{2}{6y-2} + \frac{y}{9y^2-1}$

Untuk soal nomor 13-22, ubahlah bentuk berikut ke bentuk faktor

13. $x^2 - 16$

14. $x^3 - 8$

15. $x^3 + 27$

16. $x^3 + 5x^2 + 4x$

17. $x^4 - 1$

18. $x^2 + 2x - 3$

19. $x^2 + 7x + 6$

20. $x^2 + 15x + 36$

21. $2x^2 - 3x - 9$

22. $3x^2 - 2x - 8$

Untuk soal nomor 23-29, tentukan penyelesaian persamaan berikut

23. $x^2 - 5x - 14 = 0$

24. $x^2 = -7x - 12$

25. $x^2 - 5x + 10 = 6x - 20$

26. $2x^2 + x - 10 = 0$

27. $(x-2)^2 + (x+5)^2 = (x+6)^2$

28. $(x+3)(x-2) = 4(x-3)^2$

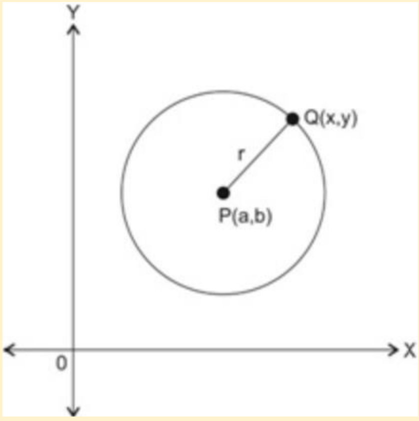
29. $\dfrac{2x-1}{3x+1} = \dfrac{x-1}{x+1}$

0.3 Menentukan dan Memahami Persamaan Lingkaran

Rangkuman Materi 0.3

Apa itu Lingkaran?

Lingkaran pada dasarnya merupakan suatu objek geometris berupa kumpulan titik-titik yang sangat banyak yang memiliki jarak yang sama terhadap pusat lingkaran. Jarak titik-titik terhadap pusat lingkaran disebut dengan jari-jari lingkaran.



Bentuk Baku Persamaan Lingkaran

Suatu lingkaran dengan pusat (a, b) berjari-jari r memiliki persamaan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Bentuk Lain Persamaan Lingkaran

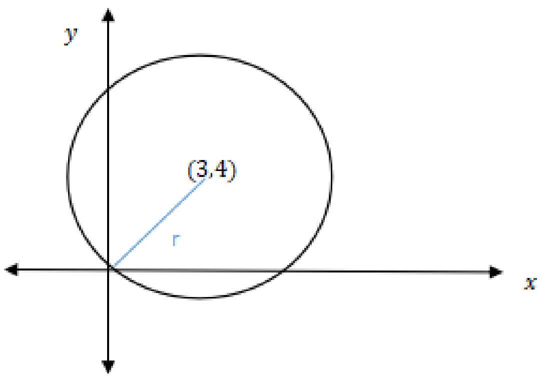
Suatu lingkaran juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Contoh Soal 0.3.1

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (3,4) dan melewati titik pusat (0,0)

Jawab:



Perhatikan bahwa dalam soal telah diketahui pusat lingkaran yaitu $(3,4)$. Selanjutnya, akan dicoba mencari jari-jari lingkarannya. Jari-jari lingkaran dapat dicari dengan menghitung jarak titik $(3,4)$ dengan titik$(0,0)$.

Misalkan titik $(3,4)$ merupakan titik P dan titik $(0,0)$ merupakan titik O, maka diperoleh

$$r = |OP| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

Sehingga, diperoleh jari-jarinya yaitu $r = 5$.

Dengan menggunakan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, didapatkan persamaan lingkarannya yaitu

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Contoh Soal 0.3.2

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Jawab:

Untuk mengerjakan soal semacam ini, ubah persamaan diatas ke dalam bentuk baku. Untuk mengubah persamaan ke bentuk baku, gunakan metode kuadrat sempurna.

Perhatikan bahwa :

$$x^2 - 2ax = x^2 - 2ax + a^2 - a^2 = (x-a)^2 - a^2$$

Sehingga persamaan diatas dapat kita tulis dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
& x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y-3)^2 - 4 - 9 - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25
\end{aligned}$$

Berdasarkan bentuk baku diatas, didapatkan pusat lingkaran yaitu $(2,3)$ dengan jari-jari 5.

Latihan Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $(7,-2)$ dan diameter 9
2. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $(-5,4)$ dan menyinggung sumbu x!
3. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $(3,-8)$ dan menyinggung sumbu y!
4. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + 6x + y^2 = 0$
5. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 - 6x + y^2 + 8y + 5 = 0$

Untuk soal nomor 6-9, tentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kondisi berikut.

6. Pusat $(1, 1)$ jari-jari 1

7. Pusat $(2, -1)$ melalui $(5, 3)$

8. Pusat $(4, 3)$ melalui $(6, 2)$

9. Diameter AB, dengan $\mathrm{A} = (1, 3)$ dan $\mathrm{B} = (3, 7)$

Tentukan pusat dan jari-jari lingjaran dengan persamaan yang diberikan.

10. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

11. $4x^2 + 16x - 15 + 4y^2 + 6y = 0$

12. $x^2 + 16x - \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

0.4 Menentukan dan Memahami Persamaan Garis

Rangkuman Materi 0.4

Gradien (kemiringan) garis yang melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, dengan $x_1 \neq x_2$ adalah: $\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Garis yang melalui titik (x_1, y_1) dengan kemiringan m, mempunyai persamaan:

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}\,.$$

Persamaan linier umum: $Ax + By + C = 0$, A dan B tidak keduanya 0.

- Dua garis tak-tegak adalah sejajar $\Leftrightarrow$ keduanya memiliki gradien yang sama dan perpotongan-y berbeda.
- Dua garis tak-tegak adalah tegak lurus $\Leftrightarrow$ gradien keduanya saling berkebalikan negatif, yaitu $(m_1 \cdot m_2 = -1)$.

Contoh Soal 0.4

Tentukan persamaan garis yang melalui $(6, 8)$ dan sejajar dengan garis $3x - 5y = 11$.

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$3x - 5y = 11$$
$$\Leftrightarrow 5y = 3x - 11$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$$

Maka, diperoleh gradien garis $3x - 5y = 11$ adalah $\frac{3}{5}$. Karena dua garis sejajar memiliki gradien yang sama, maka gradien garis yang sejajar dengan garis $3x - 5y = 11$, adalah $\frac{3}{5}$.

Akibatnya, diperoleh persamaan garis yang melalui $(6, 8)$ dan sejajar dengan garis $3x - 5y = 11$, yaitu

$$y - 8 = \frac{3}{5}(x - 6)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{18}{5} + 8$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$$
$$\Leftrightarrow 5y = 3x - 22$$
$$\Leftrightarrow 5y - 3x + 22 = 0$$

Jadi, persamaan garis yang melalui $(6, 8)$ dan sejajar dengan garis $3x - 5y = 11$, yaitu $5y - 3x + 22 = 0$.

Latihan Soal

Tentukan persamaan untuk setiap garis berikut. Tuliskan jawaban Anda dalam bentuk $Ax + By + C = 0$.

1. Melalui $(2, 2)$ dengan gradien -1.
2. Melalui $(3, 4)$ dengan gradien -1.
3. Dengan perpotongan-y 3 dan gradien 2.
4. Dengan perpotongan-y 5 dan gradien 0.
5. Melalui $(2, 3)$ dan $(4, 8)$.
6. Melalui $(4, 1)$ dan $(8, 2)$.
7. Melalui $(3, -3)$ dan sejajar garis $y = 2x + 5$
8. Melalui $(3, -3)$ dan tegak lurus garis $y = 2x + 5$
9. Melalui $(3, -3)$ dan sejajar garis $2x + 3y = 6$
10. Melalui $(3, -3)$ dan tegak lurus garis $2x + 3y = 6$
11. Melalui $(3, -3)$ dan sejajar garis yang melalui $(-1, 2)$ dan $(3, -1)$
12. Melalui $(3, -3)$ dan sejajar garis $x = 8$
13. Melalui $(3, -3)$ dan tegak lurus garis $x = 8$
14. Melalui $(-2, -1)$ dan tegak lurus garis $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$

0.5 Pertaksamaan Linier

Rangkuman Materi 0.5

Apa itu Pertidaksamaan?

Pertidaksamaan merupakan kalimat matematika yang memuat tanda $>$, $\geq$, $\leq$, atau $\leq$

Pertidaksamaan linear merupakan pertidaksamaan yang terdiri dari satu variabel dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah satu.

Bentuk umum pertidaksamaan linear

$$ax + b > cx + d$$

$$ax + b < cx + d$$

$$ax + b \geq cx + d$$

$$ax + b \leq cx + d$$

Contoh-contoh Pertidaksamaan Linear

$$5x - 3 > 10$$

$$100a - 50 \leq 201$$

$$5 < 2x + 2 \leq 21$$

Solusi dari suatu pertidaksamaan biasanya dinyatakan dengan notasi himpunan ataupun notasi interval. Tata cara penulisan notasi interval dinyatakan dalam tabel berikut.

Notasi Himpunan	Notasi Interval
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$

Cara penyelesaian

Cara untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan mirip dengan cara menyelesaikan suatu persamaan. Berikut adalah operasi-operasi tertentu yang bisa dilakukan untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan:

1. **Menambahkan** bilangan yang sama pada kedua ruas suatu pertidaksamaan;

2. **Mengalikan** kedua ruas suatu pertidaksamaan dengan suatu bilangan positif;
3. **Mengalikan** kedua ruas dengan suatu bilangan negatif, tetapi kemudian kita harus **membalikkan** arah tanda pertidaksamaan.

Contoh Soal 0.5.1

Tentukan solusi dari pertaksamaan $2x-8 \leq 4x-2$

Jawab :

$2x-8 \leq 4x-2$

$\Leftrightarrow \quad 2x \leq 4x+6$ (Menambahkan 7)

$\Leftrightarrow \quad -2x \leq 6$ (Mengurangkan $4x$)

$\Leftrightarrow \quad x \geq -3$ (Membagi dengan -2)

Sehingga diperoleh solusi pertidaksamaan dalam notasi himpunan yaitu $\{x\epsilon\mathbb{R} : x \geq -3\}$ atau dalam notasi interval yaitu $[-3, \infty)$.

Pertidaksamaan linear satu variabel juga dapat mengandung tiga ruas seperti contoh berikut. Cara penyelesaiannya kurang lebih sama dengan pertidaksamaan sebelumnya.

Contoh Soal 0.5.2

Tentukan solusi dari pertaksamaan $-5 \leq 2x+6 \leq 4$

Jawab :

$-5 \leq 2x+6 \leq 4$

$\Leftrightarrow -11 \leq 2x \leq 2$ (Mengurangkan 6)

$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leq x \leq 1$ (Membagi dengan 2)

Sehingga diperoleh solusi pertidaksamaan dalam notasi himpunan yaitu $\{x \ \epsilon\ \mathbb{R} : -\frac{11}{2} \leq x \leq 1\}$ atau dalam notasi interval yaitu $[-\frac{11}{2}, 1]$.

Latihan Soal

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan menggunakan sifat dan operasi bilangan real dan tentukan Himpunan Penyelesaian dari pertidaksamaan berikut!

1. $6x-1 \leq 5x+2$

2. $x-3 > 5-2x$

3. $\frac{5x}{2} \leq x + 10$
4. $2x - 5 \leq 23 + 9x$
5. $3x - 10 > 5x - 8$
6. $2x + 10 \geq 3x - 2$
7. $3x - 2 < \frac{x}{2} + \frac{21}{4}$
8. $-10 \leq 3x + 1 \leq 29$
9. $10 \leq 6x + 1 \leq 31$
10. $1 \leq 5x + 6 \leq 3$
11. $5 \leq 2 - 3x < 8$

0.6 Pertaksamaan Kuadrat & Rasional

Rangkuman Materi 0.6.1

Rumus relasi urutan.

1. Sifat Trikhotomi: Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ berlaku a positif, atau $a = 0$, atau $-a$ positif.
2. Jumlah dan hasil kali dua bilangan positif adalah positif.
3. a positif $\Leftrightarrow a > 0$ $\quad$ a tak negatif $\Leftrightarrow a \geq 0$

   a negatif $\Leftrightarrow a < 0$ $\quad$ a tak positif $\Leftrightarrow a \leq 0$
4. $a^2 \geq 0$; khususnya $a^2 > 0$ jika $a \neq 0$.
5. $a > 0$ dan $b < 0 \Longrightarrow ab < 0$.
6. $a < 0$ dan $b < 0 \Longrightarrow a + b < 0$ dan $ab > 0$.
7. Sifat Transitif: $a < b$ dan $b < c \Longrightarrow a < c$.

   $a > b$ dan $b > c \Longrightarrow a > c$.
8. $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$, c sebarang
9. $a < b$ dan $c > 0 \Longrightarrow ac < bc$.
10. $a < b$ dan $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$.
11. $a < b$ dan $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$.
12. $0 < a < b$ dan $0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$.
13. $0 < a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
14. $a < b < 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

NOTE: ***(Harap hati-hati saat mengkuadratkan kedua ruas, perhatikan tanda positif-negatif.***

- $\mathbf{1 < c < 3 \Rightarrow 1 < c^2 < 9}$
- $\mathbf{-3 < c < 2 \Rightarrow 0 \leq c^2 < 9}$
- $\mathbf{-2 < c < 3 \Rightarrow 0 \leq c^2 < 9}$
- $\mathbf{-3 < c < 1 \Rightarrow 0 \leq c^2 < 9}$
- $\mathbf{-1 < c < 2 \Rightarrow 0 \leq c^2 < 4}$

Contoh Soal 0.6.1

Jelaskan mengapa implikasi berikut benar,

$$2 < c < 3 \Rightarrow \frac{c}{c^2 - 1} < 1$$

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 2 < c < 3 &\Rightarrow 4 < c^2 < 9 \\ &\Rightarrow 3 < c^2 - 1 < 8 \qquad \text{(masing-masing ruas tambah (-1))} \\ &\Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{c^2-1} < \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{2}{8} < \frac{c}{c^2-1} < \frac{3}{3} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{c}{c^2-1} < 1 \end{aligned}$$

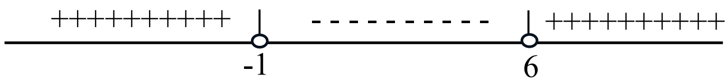
Jadi, diperoleh benar bahwa $2 < c < 3 \Rightarrow \frac{c}{c^2-1} < 1$.

Contoh Soal 0.6.2

Tentukan penyelesaian pertaksamaan $x^2 - 5x - 6 < 0$.

Jawab :

Pertaksamaan ini terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dan ruas kirinya dapat diuraikan atas dua faktor linear, sehingga diperoleh $(x-6)(x+1) < 0$. Nilai batas pertaksamaan tercapai bila ruas kiri nol, yang tercapai bila $x = 6$ dan $x = -1$. Gambar pada garis bilangan.



Cara menentukan tanda pertaksamaan:

- Ambil $x = 4$, gantikan ke ruas kiri pertaksamaan, diperoleh $(4-6)(4+1) < 0$. Akibatnya tanda pertaksamaan pada selang $(-1, 6)$ negatif.
- Dengan cara yang serupa untuk selang $(-\infty, -1)$ dan $(6, \infty)$ dengan memeriksa tanda dari suatu nilai yang terletak pada selang tersebut.
- Pada gambar garis bilangan, carilah selang bagian yang bertanda sama dengan pertaksamaan. Karena tanda pertaksamaan negatif (< 0), maka diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah selang $(-1,6)$.

Contoh Soal 0.6.3

Tentukan solusi dari pertaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$.

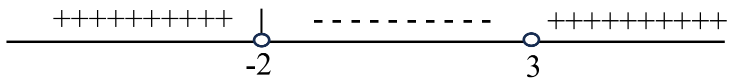
Jawab :

Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
& x^2 - x < 6 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - x - 6 < 0 \qquad \text{(masing-masing ruas ditambah } -6\text{)} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-3)(x+2) < 0 \qquad \text{(faktorkan)}
\end{aligned}
$$

Diperoleh split point $x = 3$ dan $x = -2$.

Uji titik garis bilangan,



Jadi, diperoleh himpunan pertaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$, yaitu $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$.

Untuk pertidaksamaan kuadrat seperti contoh di atas, batas interval dapat ditentukan dengan rumus kuadrat (rumuas ABC). Penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nilai $d = b^2 - 4ac$ disebut diskriminan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai dua penyelesaian real jika $d > 0$, satu penyelesaian real jika $d = 0$, dan tidak mempunyai penyelesaian real jika $d < 0$.

Rangkuman Materi 0.6.2

Bentuk umum pertaksamaan rasional adalah

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)},$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, dan $D(x)$ suku banyak dengan koefisien real. Tanda $<$ dapat diganti oleh $>, \leq$ atau $\geq$. Bentuk umum suku banyak berderajat n dengan koefisien real adalah

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + \cdots a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Langkah penyelesaian pertaksamaan rasional

1. Tetapkan di himpunan mana pertaksamaanya terdefinisi
2. Buatlah salah satu ruas pertaksamaannya menjadi nol sehingga bentuknya dapat ditulis sebagai

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

(Tanda < dapat diganti oleh >, ≤ atau ≥). Perubahan ini dilakukan dengan operasi aljabar elementer, pengurangan, penyamaan penyebut dan penyederhanaan bentuk aljabarnya.

3. Uraikan P(x) dan Q(x) atas faktor linear dan/atau kuadrat definit positif.
4. Gambarkan semua batas pertaksamaan pada garis bilangan. Nilai batas ini dicapai bila $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sama dengan nol atau tak terdefinisi.
5. Tentukan tanda pertaksamaan pada setiap selang bagian yang muncul dengan cara berikut:
   - mengambil wakil nilai dari setiap selang bagian yang muncul, tanda yang diperoleh merupakan tanda selang bagian tertentu,
   - menentukan tanda satu selang bagian dahulu, tanda selang bagian lain ditentukan berdasarkan pengulangan faktor linearnya.
6. Tentukan himpunan jawab pertaksamaannya dalam penulisan berbentuk selang, ambillah selang bagian yang bertanda sama dengan pertaksamaannya.

Contoh Soal 0.6.4

Tentukan penyelesaian pertaksamaan $\frac{2x-1}{x+2} \leq 3$.

Jawab :

Pertaksamaan ini terdefinisi pada $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$.

Perhatikan

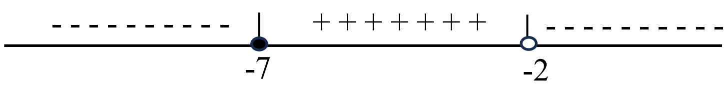
$$\frac{2x-1}{x+2} \leq 3$$

$$\frac{2x-1}{x+2} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x-1-3(x+2)}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{-x-7}{x+2} \leq 0$$

Nilai batas tercapai saat $x = -7$ atau $x = -2$.



Nilai $x = -7$ merupakan penyelesaian pertaksamaan sedangkan $x = -2$ bukan penyelesaian melainkan nilai x yang mengakibatkan pertaksamaan tidak terdefinisi.

Dengan mengambil $x = 0$ didapatkan tanda pertaksamaan pada selang $(-2, \infty)$ positif. Karena tanda pertaksamaan negatif (≤ 0), maka diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah selang $(-\infty, -7] \cup (-2, \infty)$.

Rangkuman Materi 0.6.3

Secara umum, aturan menentukan tanda pertaksamaan dengan melihat pengulangan faktor linearnya adalah sebagai berikut.

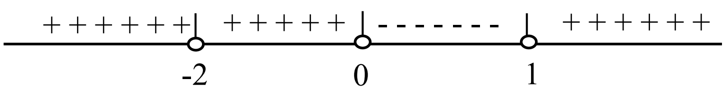
- Bentuk pertaksamaan: ruas kiri terdiri dari sejumlah berhingga faktor linear dengan pengulangan tertentu dan ruas kanan nol.
- Tetapkan nilai batas pertaksamaan dan tanda dari suatu selang bagiannya.
- Bilangan melintasi nilai batas yang berasal dari faktor linear berpangkat bilangan ganjil, maka tanda selang bagian berikutnya berubah (berlawanan tanda dengan selang bagian sebelumnya).
- Bila melintasi nilai batas yang berasal dari faktor linear berpangkat bilangan genap, maka tanda selang bagian berikut tetap (bertanda sama dengan selang bagian sebelumnya).

Contoh Soal 0.6.4

Tentukan penyelesaian pertaksamaan $x^3(x+2)^2(x-1) > 0$.

Jawab :

Pertaksamaan ini terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dengan nilai batas $x = 0, x = -2$ dan $x = 1$. Gambar nilai batas pada garis bilangan.



- Karena untuk x > 1 perkalian setiap faktor di ruas kiri selalu positif, maka tanda selang $(1, \infty)$ adalah positif.

- Karena x = 1 berasal dari faktor linear berpangkat satu, maka tanda selang (0, 1) adalah negatif.
- Karena x = 0 berasal dari faktor linear berpangkat ganjil, maka tanda selang (-2, 0) adalah positif.
- Karena x = - 1 berasal dari faktor linear berpangkat genap, maka tanda selang $(-\infty, -2)$ adalah positif.

Dengan demikian himpunan penyelesaian pertaksamaan $x^3(x+2)^2(x-1) > 0$ adalah

$$HP = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, \infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \setminus \{-2\}$$

Latihan Soal

Untuk soal nomor 1-29, selesaikan pertaksamaan berikut.

1. $x^2 - 5x - 6 < 0$
2. $x^2 + x - 12 > 0$
3. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
4. $4x^2 - 5x - 6 \leq 0$
5. $x^2 - 9 \geq 0$
6. $x^2 - 4x - 5 > 0$
7. $x^2 < 7x$
8. $x^2 + 9 \leq 6x$
9. $x^2 + 2x + 3 > 0$
10. $x^2 + 4x + 5 < 0$
11. $x^3 - 3x^2 + 2x < 0$
12. $x^3 + 10x^2 + 25x \geq 0$
13. $\frac{x-4}{x+2} \geq 0$
14. $\frac{2x+5}{x-4} > 0$
15. $\frac{2}{x-1} < 1$
16. $\frac{7}{4x} < 7$
17. $\frac{1}{3x-2} \leq 4$
18. $\frac{3}{x+5} > 2$
19. $\frac{3}{2x-1} \leq \frac{2}{x}$
20. $\frac{3x+8}{x+1} < x$
21. $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$
22. $(2x+3)(3x-1)(x-2) > 0$
23. $(2x-3)(x-1)^2(x-2) > 0$
24. $(2x-3)(x-1)^3(x-2) \geq 0$
25. $(x-1)(x-2)^2(x-5) \geq 0$
26. $(x-1)^4(x+3) \leq 0$
27. $(x-2)^2(x+1)(x+2) > 0$
28. $\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x+3)} < 0$
29. $\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+4)^3} < 0$

Untuk soal nomor 30-37, tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan majemuk berikut.

30. $3x + 10 > 1$ dan $2x + 1 < 3$
31. $3x + 10 > 1$ dan $2x + 1 > -4$
32. $3x + 10 > 1$ dan $2x + 1 < -4$
33. $2x + 1 < 5$ dan $3x - 2 > -7$
34. $4x - 7 < -1$ atau $5x + 3 > 18$
35. $2x - 7 > 1$ atau $2x + 1 < 3$
36. $2x - 7 \leq 1$ atau $2x + 1 < 3$
37. $2x - 7 \leq 1$ atau $2x + 1 > 3$

Jelaskan mengapa implikasi berikut benar:

38. $0 < c < 1 \Rightarrow c^2(c + 1) < 2$
39. $1 < c < 2 \Rightarrow \frac{24}{(1+c)^2} < \frac{3}{4}$

0.7 Mutlak

Rangkuman Materi 0.7

Nilai mutlak dari suatu bilangan real, ditulis |x|, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Sifat

Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

(a) $|x| \geq 0$

(b) $|-x| = |x|$

(c) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

(d) $\sqrt{x^2} = |x|$

(e) $-|x| \leq x \leq |x|$

(f) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

(g) $|xy| = |x||y|$

(h) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(j) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Untuk setiap $a \geq 0$ berlaku

(a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ atau $x \leq -a$

1. $|-5| = -(-5) = 5$
2. $|3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$ karena $3 - \sqrt{7} > 0$
3. $|3 - \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10}) = \sqrt{10} - 3$ karena $3 - \sqrt{10} < 0$
4. Dengan menggunakan definisi nilai mutlak,

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), x - 3 < 0 \end{cases}$$

Contoh Soal 0.7.1

Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $|x - 1| = 2$

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$|x - 1| = 2$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \text{ atau } x - 1 = -2$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = -1$$

Akibatnya, diperoleh bilangan real x yang memenuhi persamaan $|x - 1| = 2$ adalah $x = 3$ atau $x = -1$.

Contoh Soal 0.7.2

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-1|<2$

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} & |x-1|<2 \\ \Leftrightarrow\ & -2<x-1<2 \\ \Leftrightarrow\ & -1<x<3 \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh bahwa himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-1|<2$, adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid -1<x<3\}=(1,3)$

Contoh Soal 0.7.3

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-1|>2$

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} & |x-1|>2 \\ \Leftrightarrow\ & x-1>2 \text{ atau } x-1<-2 \\ \Leftrightarrow\ & x>3 \text{ atau } x<-1 \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh bahwa himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-1|<2$, adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x>3 \text{ atau } x<-1\}=(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.

Contoh Soal 0.7.4

Misalkan $\varepsilon>0$. Tentukan suatu $\delta>0$ (yang bergantung pada ε) agar implikasi berikut benar.

$$|x-3|<\delta \Rightarrow |6x-18|<\varepsilon$$

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} |6x-18|<\varepsilon & \Leftrightarrow |6(x-3)|<\varepsilon \\ & \Leftrightarrow 6|x-3|<\varepsilon \\ & \Leftrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

Pilih $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$, maka

$$|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x-18|=6|x-3|<6\delta=6\cdot\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon.$$

Contoh Soal 0.7.5

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|3x+1| < 2|x-6|$

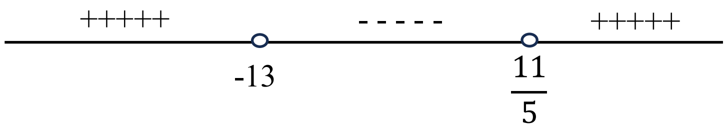
Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} |3x+1| < 2|x-6| \iff & \quad |3x+1| < |2x-12| \\ \iff & \quad (3x+1)^2 < (2x-12)^2 \\ \iff & \quad 9x^2+6x+1 < 4x^2-48x+144 \\ \iff & \quad 5x^2+54x-143 < 0 \\ \iff & \quad (x+13)(5x-11) < 0 \end{aligned}$$

Diperoleh pembuat nol, $x = -13$ dan $x = \frac{11}{5}$

Uji titik garis bilangan,



Jadi, diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|3x+1| < 2|x-6|$, yaitu $\{x \in \mathbb{R} \mid -13 < x < \frac{11}{5}\} = \left(-13, \frac{11}{5}\right)$.

Contoh Soal 0.7.6

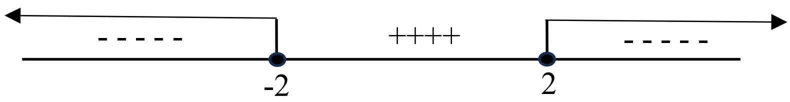
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x^2-10| \le 6$.

Jawab:

Perhatikan bahwa,

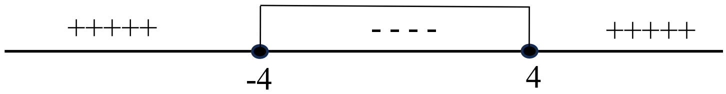
$$\begin{aligned} |x^2-10| \le 6 \iff & -6 \le x^2-10 \le 6 \\ \iff & -6 \le x^2-10 \quad \textit{dan} \quad x^2-10 \le 6 \\ \iff & -x^2+10-6 \le 0 \quad \textit{dan} \quad x^2-10-6 \le 0 \\ \iff & 4-x^2 \le 0 \quad \textit{dan} \quad x^2-16 \le 0 \\ \iff & (2-x)(2+x) \le 0 \quad \textit{dan} \quad (x-4)(x+4) \le 0 \end{aligned}$$

- Uji titik garis bilangan untuk $(2-x)(2+x) \le 0$,



Diperoleh solusi untuk $(2-x)(2+x) \leq 0$, yaitu $(-\infty,-2\,] \cup [\;2,\;\infty\,)$.

- Uji titik garis bilangan untuk $(x-4)(x+4) \leq 0$,

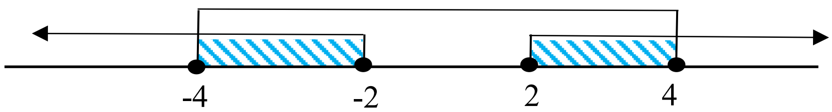


Diperoleh solusi untuk $(x-4)(x+4) \leq 0$, yaitu $[-4, 4\;]$.

Akibatnya, diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x^2-10| \leq 6$, yaitu

$$\big((-\infty,-2] \cup [2,\infty)\big) \;\cap\; [-4,4\,]$$

Plot pada garis bilangan, diperoleh



Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x^2-10| \leq 6$, adalah $[-4,-2] \cup [\,2\,,4\,]$

Latihan Soal

Untuk soal nomor 1-9, tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan berikut.

1. $|2x-3| \leq 1$
2. $|x-2| \geq 5$
3. $|3x-1| > 2$
4. $|2x-7| \leq 5$
5. $|2x^2-5| < 3$
6. $|x+2| < |2x-3|$
7. $|x-5| > 2|x-1|$
8. $\left|\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{2}\right| \geq \dfrac{1}{2}$
9. $\left|\dfrac{1}{x-1}-2\right| \leq 1$

Untuk soal nomor 10-12, jelaskan mengapa implikasi berikut benar.

10. $|x-1| < 0{,}1 \;\Rightarrow |4x-8| < 0{,}4$
11. $|x+4| < 0{,}3 \;\Rightarrow |5x+20| < 1{,}5$
12. $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5} \;\Rightarrow |5x-5| < \varepsilon$

Untuk soal nomor 13-17, tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut benar.

13. $|x| \leq 2 \Rightarrow |x^2+2x+6| \leq 14$
14. $|x| \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{|x+4|} \leq \dfrac{1}{2}$

15. $|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\dfrac{x^2+2x+6}{x+4}\right| \leq 7$
16. $|x-2| < 1 \Rightarrow |x+2| < 5$
17. $|x-2| < 1 \Rightarrow |x^2-4| < 5$

0.8 Grafik Persamaan

Rangkuman Materi 0.8.1

Apa itu Grafik Persamaan?

Grafik Persamaan dalam koordinat kartesius merupakan kumpulan titik-titik (x, y) yang memenuhi suatu persamaan tertentu.

Prosedur Menggambar Grafik Persamaan

1. Ambilah beberapa titik yang memenuhi persamaan.
2. Plot (Letakkan) titik tersebut pada koordinat kartesius
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan garis

Perhatikan bahwa cara diatas merupakan cara paling sederhana untuk menggambar grafik persamaan dan bisa saja tidak akurat. Cara menggambar grafik yang lebih akurat dibahas pada bagian selanjutnya.

Contoh Soal 0.8.1

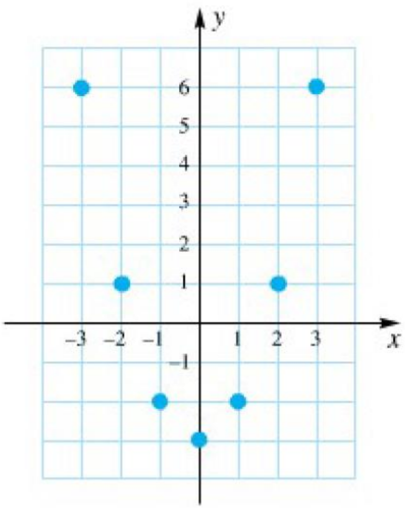
Gambarlah grafik persamaan $y = x^2 - 3$

Jawab:

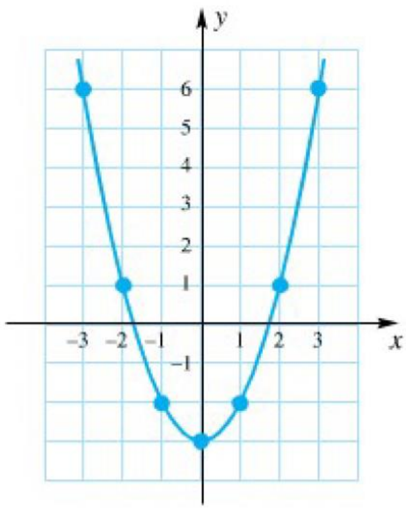
$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6

Tabel nilai x dan y



Plot titik (x, y)

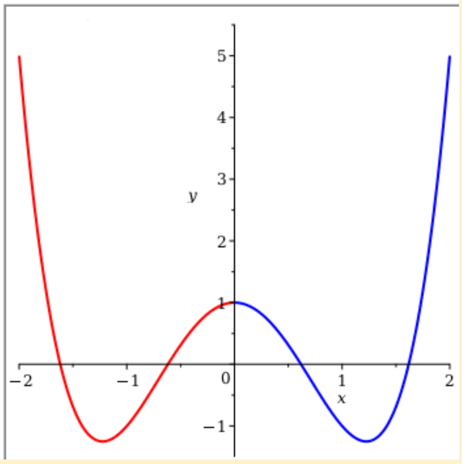


Hubungkan titik-titik

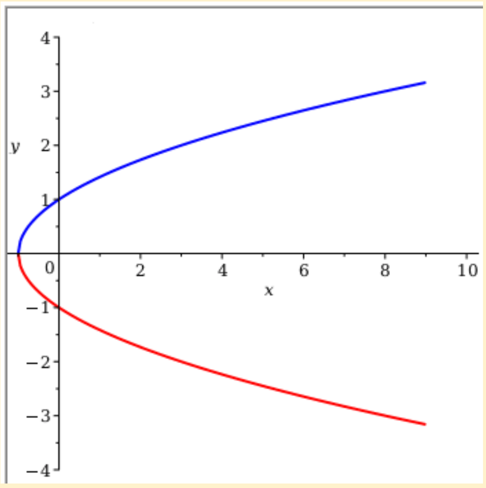
Rangkuman Materi 0.8.2

Sifat Simetri pada grafik

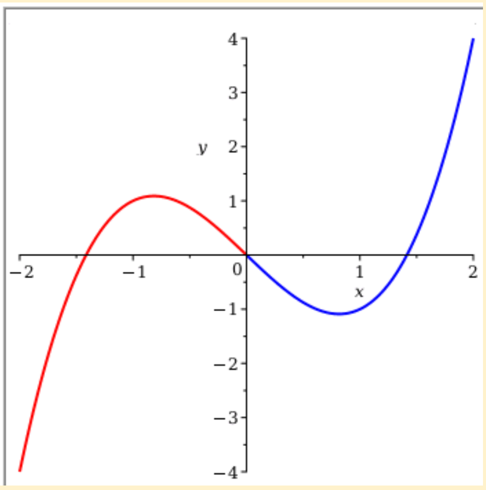
1. Simetri terhadap sumbu y : jika (x, y) di grafik maka $(-x, y)$ juga ada di grafik



2. Simetri terhadap sumbu x : jika (x, y) di grafik maka $(x, -y)$ juga ada di grafik



3. Simetri terhadap titik asal : jika (x, y) di grafik maka $(-x, -y)$ juga ada di grafik



Contoh Soal 0.8.2

Periksa kesimetrian grafik persamaan $y = -x^2 + 1$

Jawab:

Lakukan uji kesimetrian :

- Uji simetri terhadap sumbu y. Ambil sembarang titik (x, y) pada grafik yang memenuhi persamaan, lalu coba substitusikan $(-x, y)$, maka didapatkan

$$y = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1$$

Dapat kita simpulkan bahwa $(-x, y)$ juga memenuhi persamaan. Sehingga grafik persamaan tersebut memiliki sifat simetri terhadap sumbu y.

- Uji simetri terhadap sumbu x. Ambil sembarang titik (x, y) pada grafik yang memenuhi persamaan, lalu coba substitusikan $(x, -y)$, maka didapatkan

$$-y = -(x)^2 + 1 = -x^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 1$$

Dapat kita simpulkan bahwa $(-x, y)$ tidak memenuhi persamaan. Sehingga grafik persamaan tersebut tidak memiliki sifat simetri terhadap sumbu x.

- Uji simetri terhadap titik asal. Ambil sembarang titik (x, y) pada grafik yang memenuhi persamaan, lalu coba substitusikan $(-x, -y)$, maka didapatkan

$$-y = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 1$$

Dapat kita simpulkan bahwa $(-x, -y)$ tidak memenuhi persamaan. Sehingga grafik persamaan tersebut tidak memiliki sifat simetri terhadap titik asal.

Rangkuman Materi 0.8.3

Titik Potong Sumbu

Titik potong sumbu x suatu grafik persamaan merupakan suatu titik yang memiliki ordinat 0 ($y = 0$) dan titik potong sumbu y suatu grafik persamaan merupakan suatu titik yang memiliki absis 0 ($x = 0$)

Contoh Soal 0.8.3

Tentukan titik potong sumbu x dan sumbu y dari persamaan $y = 6x - x^2$

Jawab:

- Titik potong sumbu x diperoleh dengan mensubstitusi $y = 0$, sehingga didapat persamaan

$$
\begin{aligned}
& 0 = 6x - x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = x(6 - x) \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ atau } x = 6
\end{aligned}
$$

  Didapatkan titik potong sumbu x yaitu $(0,0)$ dan $(6,0)$.

- Titik potong sumbu y diperoleh dengan mensubstitusi $x = 0$, sehingga didapat persamaan

$$y = 6(0) - (0)^2 = 0$$

Didapatkan titik potong sumbu y yaitu $(0,0)$.

0.9 Fungsi dan Grafiknya

Rangkuman Materi 0.9.1

Apa itu Fungsi?

Fungsi merupakan suatu aturan yang memetakan setiap unsur di suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) ke tepat satu unsur himpunan lain yang disebut daerah kawan (kodomain).

Notasi : f, g, h, F, G, H

Contoh Soal 0.9.1

Misalkan $f(x) = 2x^2 - 3x$. Tentukan (dan sederhanakan) nilai atau ekspresi berikut.

a) $f(2)$

b) $f(2+h)$

c) $f(2+h) - f(2)$

Jawab:

a) $f(2) = 2(2^2) - 3(2) = 2$

b) $f(2+h) = 2(2+h)^2 - 3(2+h) = 2(4+4h+h^2) - 6 - 3h = 2 + 5h + h^2$

c) $f(2+h) - f(2) = 2 + 5h + h^2 - 2 = 5h + h^2$

Rangkuman Materi 0.9.2

Domain Natural dari Fungsi

Domain natural dari fungsi f adalah himpunan semua bilangan real x sehingga $f(x)$ terdefinisi.

Contoh Soal 0.1

Tentukan daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{2x-6}$

Jawab:

Agar $f(x)$ terdefinisi pada bilangan real, maka haruslah $2x - 6 \geq 0$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2x - 6 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 6 \\ \Leftrightarrow x &\geq 3 \end{aligned}$$

Jadi, daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{2x-6}$ adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, \infty)$.

Rangkuman Materi 0.9.3

Grafik Fungsi

Grafik fungsi f merupakan grafik persamaan $y = f(x)$. Cara membuat grafik fungsi kurang lebih sama dengan cara membuat grafik persamaan.

Daerah hasil (range) dari f, dinotasikan dengan R_f:

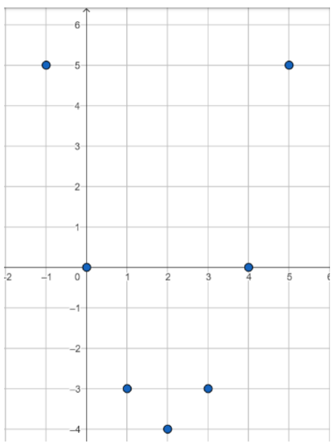
$$R_f = \{y |\ terdapat\ x \in D_f\ sehingga\ f(x) = y\}$$

Contoh Soal 0.9.3

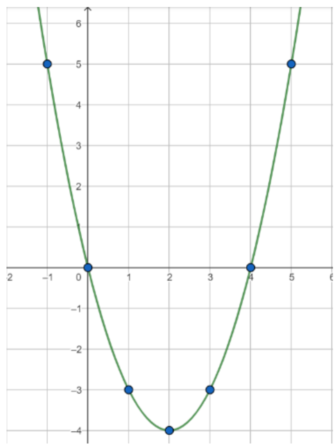
Sketsa fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ dan tentukan daerah hasilnya.

x	$y = f(x)$
-1	5
0	0
1	-3
2	-4
3	-3
4	0
5	5

Tabel nilai x dan y



Plot titik (x, y)



Hubungkan titik-titik

Berdasarkan grafik fungsi diatas, didapatkan daerah hasil fungsinya yaitu $\{x | x \geq -4\}$

Perhatikan bahwa,

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4}$$

(Ingat! :: Grafik $\boldsymbol{y - b = (x - a)^2}$, dapat diperoleh dengan menggeser grafik $\boldsymbol{y = x^2}$ ke kanan sejauh $\boldsymbol{a}$ satuan dan ke bawah sejauh $\boldsymbol{b}$ satuan)

Rangkuman Materi 0.9.4

Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

Fungsi ganjil adalah fungsi yang memenuhi sifat $f(-x) = -f(x)$ dan grafik fungsinya simetri terhadap titik asal. Sedangkan, fungsi genap adalah fungsi yang memenuhi sifat $f(-x) = f(x)$ dan grafik fungsinya simetri terhadap sumbu y.

Contoh Soal 0.9.4

Tunjukkan bahwa $f(x) = x^3 - 2x$ fungsi ganjil, sedangkan : $g(x) = x^2 - 4$ fungsi genap.

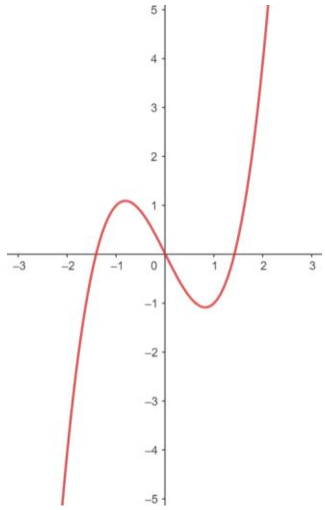
Jawab:

Perhatikan bahwa

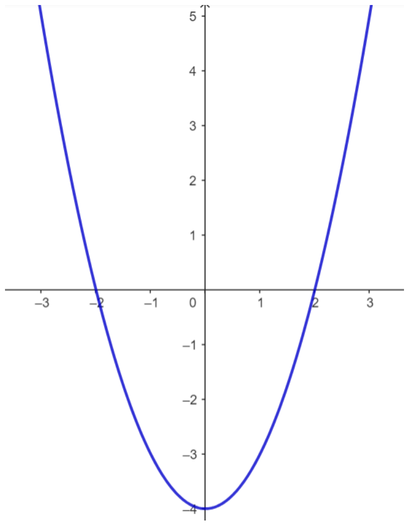
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = g(x)$$

Jadi, $f(x) = x^3 - 2x$ fungsi ganjil, sedangkan : $g(x) = x^2 - 4$ fungsi genap.



Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x$



Grafik fungsi $g(x) = x^2 - 4$

Latihan Soal

Untuk soal nomor 1-6, tentukan daerah asal fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = x^2 + x - 1$
2. $f(x) = \sqrt{6 - 3x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$
5. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x - 3}$
6. $f(x) = \sqrt{x^3}$

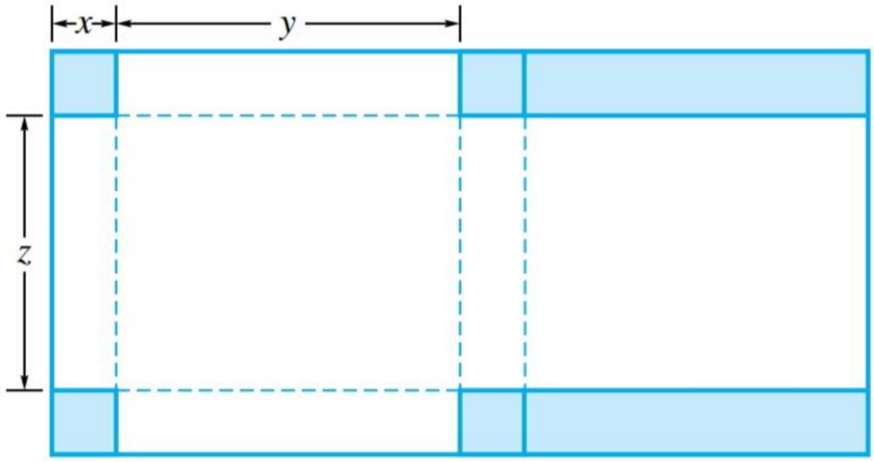
Untuk soal nomor 10-11, sketsakan grafik fungsi-fungsi berikut dan tentukan daerah hasilnya.

7. $f(x) = 3x + 1$
8. $f(x) = x^2 - x$

10. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
11. $h(x) = \sqrt{x - 1}$

9. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

12. Suatu segitiga siku-siku memiliki panjang sisi miring 10 dan panjang sisi terpendek x. Tentukan luas $A(x)$ dari segitiga tersebut (sebagai fungsi dari x) dan tentukan daerah asal dari $A(x)$.
13. Suatu persegi panjang memiliki keliling 100 dan salah satu panjang sisinya adala x. Tentukan luas persegi panjang tersebut sebagai fungsi dalam x dan tentukan daerah asal fungsi tersebut.
14. Suatu kotak tertutup akan dibuat dari suatu karton berukuran 5×8 dengan memotong daerah yang diarsir seperti pada gambar berikut.



Tentukan volume kotak yang dihasilkan sebagai fungsi dalam x dan tentukan daerah asal fungsi tersebut.

15. Sebuah kaleng tertutup berbentuk tabung memiliki luas permukaan 100 cm^2. Nyatakan volume kaleng tersebut sebagai fungsi dari jari-jari alas dan tentukan daerah asal fungsi tersebut.

Untuk soal nomor 16-24, periksa apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi ganjil, genap atau bukan keduannya.

16. $f(x) = x + 2$
17. $f(x) = x^8 - 5x^4 + 1$
18. $f(x) = x^3 + 2x$
19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$
20. $f(x) = 2x^2 - 3|x|$
21. $f(x) = x^2 - x + 1$
22. $f(x) = x \sin x + \cos x$
23. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$
24. $f(x) = x^2 \cos x$

25. Diketahui fungsi f dengan daerah asal $\mathbb{R}$ adalah fungsi periodeik dengan periode 3 dan memenuhi $f(x) = x^2 - 3x$ untuk $0 \leq x < 3$. Sketsakan grafik fungsi f dan tentukan $f(100)$, $f(110)$, dan $f(123)$.
26. Suatu fungsi g dengan daerah asal $(-\infty, \infty)$ adalah fungsi ganjil dan periodik dengan periode 8. Diketahui bahwa $g(x) = 2 - |x - 2|$ untuk $0 \leq x \leq 4$. Sketsakan grafik fungsi g dan tentukan $g(100)$ dan $g(103)$.

BAB 1
LIMIT FUNGSI

1.1 Pengantar Limit

Limit merupakan suatu konsep dalam matematika khususnya kalkulus yang mencoba melihat bagaimana nilai suatu fungsi $f(x)$ ketika diberikan masukan x yang cukup dekat dengan suatu konstanta c. Notasi **limit fungsi f(x) untuk x mendekati c** dapat dituliskan dalam ekspresi berikut.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Secara intuitif, notasi diatas artinya Ketika x dekat dengan c namun $x \neq c$ maka $f(x)$ dekat dengan L.

Limit Kanan dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Artinya ketika x cukup dekat dengan c dan x terletak di sebelah **kanan** c (untuk x yang lebih dari c dan cukup dekat dengan c), maka $f(x)$ dekat dengan L.

Sementara itu,

Limit Kiri dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Artinya ketika x cukup dekat dengan c dan x terletak di sebelah **kiri** c (untuk x yang kurang dari c dan cukup dekat dengan c), maka $f(x)$ dekat dengan L.

Suatu ekspresi limit memiliki nilai jika dan hanya jika nilai limit kirinya sama dengan nilai limit kanannya, secara matematis dapat kita tuliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Rangkuman Materi 1.1.1

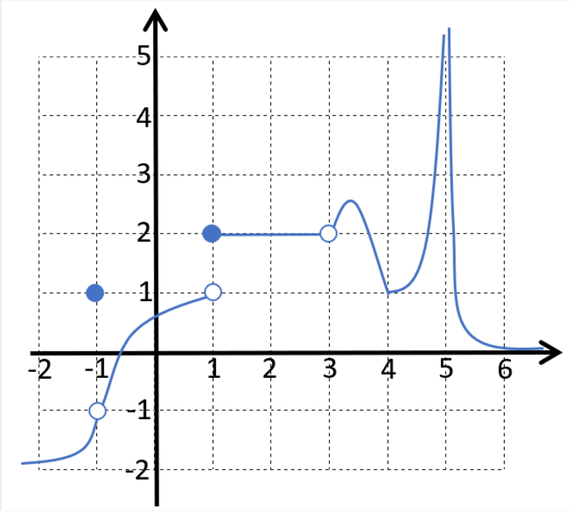
Pengertian Presisi Limit

Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (berapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$, asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Contoh Soal 1.1.1

Perhatikan gambar grafik $y = f(x)$ berikut



Gambar 1

Tentukan $f(-1)$, $\lim_{x\to-1} f(x)$, dan $\lim_{x\to-1} f(x)$ jika ada.

Jawab:

- nilai $f(-1) = 1$,
- sedangkan bila x mendekati -1 baik dari kiri maupun dari kanan kecendrungan nilai $f(x)$ mendekati nilai -1. Ini berarti nilai

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = -1.$$

- Kemudian, untuk x mendekati 1 dari kanan, $f(x)$ kecendrungan bernilai 2. Sedangkan, untuk x mendekati 1 dari kiri, $f(x)$ kecendrungan mendekati nilai 1. Dengan demikian, $\lim_{x\to1} f(x) =$ tidak ada, $\lim_{x\to1^-} f(x) = 1$, dan $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$.

Latihan Soal

1. Untuk fungsi f yang digambarkan pada Gambar 1, tentukan nilai-nilai berikut (jika ada) !

(a) $\lim_{x\to3} f(x)$

(b) $\lim_{x\to4^-} f(x)$

(c) $\lim_{x\to4} f(x)$

(d) $\lim_{x\to5} f(x)$

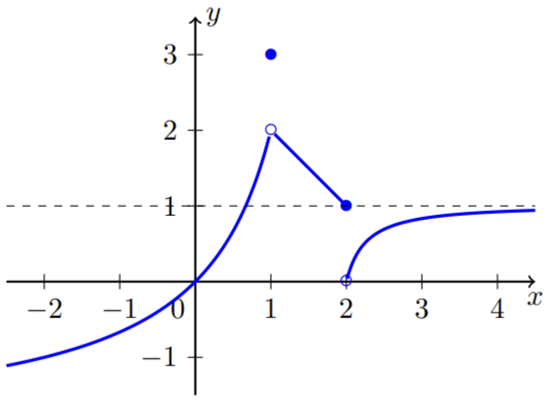
(e) $f(3)$

(f) $f(1)$

(g) $f(4)$

(h) $f(5)$

2. Perhatikan grafik fungsi f di bawah dan tentukan nilai limit dan fungsi berikut (jika ada).



a. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

b. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

c. $\lim_{x\to 0} f(x)$

d. $f(0)$

e. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

f. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

g. $\lim_{x\to 1} f(x)$

h. $f(1)$

i. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

j. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

k. $\lim_{x\to 2} f(x)$

l. $f(2)$

1.2 Sifat dan Operasi dalam Limit

Rangkuman Materi 1.2.1

Sifat Dasar Limit

Misalkan n bilangan bulat positif, k suatu konstanta dan f dan g merupakan suatu fungsi yang mempunyai limit di c, maka

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.
7. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
8. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ketika n genap.

9. Teorema Apit

Misalkan f, g, dan h adalah fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, terkecuali mungkin pada c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Contoh Soal 1.2.1

Diketahui fungsi f dan g dengan $f(1) = 4,\ g(1) = -3,\ \lim_{x \to 1} f(x) = -2$, dan $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$. Tentukan nilai $\lim_{x \to 1}\left(3f(x) - g(x)\right)$

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1}\left(3f(x) - g(x)\right) &= \lim_{x \to 1} 3f(x) - \lim_{x \to 1} g(x) \\
&= 3\lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x) \\
&= 3(-2) - 2 \\
&= -8
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.2.2

Jika $\lim_{x \to a} g(x)^5 = 32768$, maka $\lim_{x \to a} \frac{6}{\sqrt[3]{g(x)}}$ adalah . . .

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$$32768 = 8^5 \text{ , dan } 32768 = \lim_{x \to a} g(x)^5 = \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)^5$$

Maka, $\lim_{x \to a} g(x) = 8$. Akibatnya,

$$\lim_{x \to a} \frac{6}{\sqrt[3]{g(x)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{\lim_{x \to a} g(x)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Rangkuman Materi 1.2.2

<u>**Sifat Khusus Limit (substitusi)**</u>

Misalkan f merupakan fungsi polinom atau fungsi rasional dengan nilai $f(c)$ ada maka berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Catatan : Dalam kasus $f(x)$ merupakan fungsi rasional, nilai penyebut $f(x)$ saat $x = c$ tidak boleh nol.

Contoh Soal 1.2.3

Hitung nilai limit $\lim_{x \to 1}(x^2 - 5x + 6)$.

Jawab:

Karena $f(x) = x^2 - 5x + 6$ merupakan polinom, maka

$$\lim_{x \to 1}(x^2 - 5x + 6) = f(1) = 1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

Contoh Soal 1.2.4

Hitung nilai limit berikut $\lim_{x \to 1} \frac{3x-2}{2x-1}$

Jawab:

Karena $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$ merupakan fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 2}{2x - 1} = \frac{3(1) - 2}{2(1) - 1} = 1$$

Contoh Soal 1.2.5

Hitung $\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = \frac{44}{-8} = -\frac{11}{2}.$$

Sering dijumpai untuk fungsi rasional nilai $f(c)$ tidak ada (bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\infty - \infty$), maka dapat menggunakan cara pemfaktoran atau penyederhanaan berikut.

Rangkuman Materi 1.2.3

Sifat Khusus Limit (Pemfaktoran dan Penyederhanaan)

Jika $f(x) = g(x)$ **di sekitar** $x = c$ tidak harus di c itu sendiri, dan jika $\lim_{x\to c} g(x)$ ada, maka $\lim_{x\to c} f(x)$ juga ada dan $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$

Contoh Soal 1.2.6

Hitung nilai limit $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

Jawab:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} x+5 = 7$$

Perhatikan bahwa jika $f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ dan $g(x) = x+5$, maka berlaku $f(x) = g(x)$ **di sekitar** $x = 2$ dengan $x \neq 2$, dan karena $\lim_{x\to 2} g(x) = 7$, maka $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. Metode di atas biasa dikenal dengan metode pemfaktoran yang biasa dipelajari di SMA.

Contoh Soal 1.2.7

Hitung nilai limit $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$

Jawab:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1(x+1)}{x(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-x-1}{x(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(x+1)} = -1$$

Perhatikan bahwa jika $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$dan $g(x) = \frac{-1}{(x+1)}$, maka berlaku $f(x) = g(x)$ **di sekitar** $x = 0$, dan karena $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$ maka $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$.

Contoh Soal 1.2.8

Hitung nilai limit $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Jawab:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

Latihan Soal

1. Misalkan $f(1)=4,\ g(1)=-3, \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$, dan $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$. Tentukan nilai limit berikut.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+3\right)g(1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(g(x)\right)^2-9x}{f(x)-f(1)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\left(f(x)\right)^2+6g(x)}$

2. Jika $\lim\limits_{x\to a} g(x)^5=32$, maka $\lim\limits_{x\to a}\frac{3}{\sqrt[3]{g(x)}}$ adalah . . .

Untuk soal nomor 3-11, hitung nilai limit berikut

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2+2x}$

4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^3-27}{h}$

5. $\lim\limits_{t\to -1}\left(\dfrac{2t}{t^2-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi^2}\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+5}{5-4x}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+1}{7-2x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 4}(5x-3)$

9. $\lim\limits_{y\to -1}\left(y^3-2y^2+3y-1\right)$

10. $\lim\limits_{u\to 4}\sqrt{\dfrac{2u^2+4}{u+5}}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+1}{7x^2-13}$

12. $\lim\limits_{x \to 3} (7x + 5)$

13. $\lim\limits_{t \to -1} (t^3 + 3t - 2)$

14. $\lim\limits_{u \to 2} \sqrt{\dfrac{3u^2 + 4}{u + 2}}$

15. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

16. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

17. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{3x - 12}$

18. $\lim\limits_{t \to 1} \left(\dfrac{2t}{t^2 - 1} - \dfrac{1}{t - 1} \right)$

1.3 Limit Trigonometri

Rangkuman Materi 1.3.1

Sifat Umum dalam Limit Trigonometri

Untuk setiap bilangan real c di domain fungsi trigonometri berikut, berlaku

1. $\lim_{t\to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t\to c} \sec t = \sec c$
5. $\lim_{t\to c} \csc t = \csc c$
6. $\lim_{t\to c} \cot t = \cot c$

Sifat Khusus dalam Limit Trigonometri

1. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$
3. $\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$

Tips : Untuk menyelesaikan permasalahan limit trigonometri bentuk rasional, ubah ekspresi limit sehingga menghasilkan sifat khusus diatas.

Contoh Soal 1.3.1

Hitunglah nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

Jawab:

Misalkan $y = 5x$, jika $x \to 0$, maka $y \to 0$. Dengan demikian

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{3} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{3} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Contoh Soal 1.3.2

Hitunglah nilai $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(6x)}{2x\sin(4x)}$.

Jawab:

Misalkan $y = 6x$ dan $t = 4x$, jika $x \to 0$, maka $y \to 0$ dan $t \to 0$. Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(6x)}{2x\sin(4x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(6x)}{2x\sin(4x)}\cdot\frac{1+\cos(6x)}{1+\cos(6x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(6x)}{2x\sin(4x)(1+\cos(6x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(6x)}{2x\sin(4x)(1+\cos(6x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(6x)^2}{(2x)(1+\cos(6x))(4x)}\cdot\frac{\sin^2(6x)}{(6x)^2}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{36\cancel{x^2}}{8\cancel{x^2}(1+\cos(6x))}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{(6x)}\cdot\frac{\sin(6x)}{(6x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin(4x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{36\cancel{x^2}}{8\cancel{x^2}(1+\cos(6x))}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{(y)}\cdot\frac{\sin(y)}{(y)}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}\\
&= \frac{36}{8(1+\cos 0)}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.3.3

Hitunglah nilai $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\\
&= \lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)}\\
&= \lim_{x\to \pi}\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}\,(1-\cos x)}\\
&= \lim_{x\to \pi}\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos\pi} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Latihan Soal

Hitung nilai limit berikut.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^4 x}{5x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}$

3. $\lim\limits_{y\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos y - \sin y}{2y - \frac{\pi}{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(4x)-1}{x\sin(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

9. $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{4t-\pi}{\sin t - \cos t}$

1.4 Limit Tak Hingga

Rangkuman Materi 1.4.1

Limit di Tak Hingga

Limit di tak hingga merupakan suatu konsep dalam bahasan limit yang mencoba melihat bagaimana nilai suatu fungsi $f(x)$ ketika x membesar tanpa batas.

Limit di tak hingga dapat dinotasikan dengan ekspresi berikut.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Suatu ekspresi limit $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ artinya ketika x membesar tanpa batas, maka nilai $f(x)$ akan semakin dekat ke L.

Selain itu, ekspresi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ memiliki arti jika x mengecil tanpa batas menuju bilangan yang sangat negative, maka nilai $f(x)$ akan semakin dekat ke L.

Limit di tak hingga juga dapat dipandang sebagai limit di x menuju 0 dari kanan atau x menuju 0 dari kiri sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sifat Utama Limit di Tak Hingga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tips : Untuk menyelesaikan soal limit di tak hingga, lakukan manipulasi aljabar sehingga menghasilkan bentuk diatas, lalu gunakan kedua sifat di atas.

Contoh Soal 1.4.1

Hitunglah limit $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-7}{2x^2+3x-1}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-7}{2x^2+3x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-7}{2x^2+3x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{7}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{5-0}{2+0-0} = \frac{5}{2}$$

Contoh Soal 1.4.2

Hitunglah limit $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{100^{1.000}+5\sqrt{x}}{\sqrt{10.000+16x}}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{100^{1.000}+5\sqrt{x}}{\sqrt{10.000+16x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{100^{1.000}+5\sqrt{x}}{\sqrt{10.000+16x}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{100^{1.000}\frac{1}{\sqrt{x}}+5\sqrt{1}}{\sqrt{\frac{10.000}{x}+16}}$$

$$= \frac{100^{1.000}\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}+5}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10.000}{x}+16}} = \frac{100^{1.000}\cdot 0+5}{\sqrt{0+16}} = \frac{5}{4}$$

Contoh Soal 1.4.3

Hitunglah limit $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+3x+2}-\sqrt{9x^2-x}$

Jawab:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+3x+2}-\sqrt{9x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+3x+2}-\sqrt{9x^2-x}\cdot\frac{\sqrt{9x^2+3x+2}+\sqrt{9x^2-x}}{\sqrt{9x^2+3x+2}+\sqrt{9x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(9x^2+3x+2\right)-\left(9x^2-x\right)}{\sqrt{9x^2+3x+2}+\sqrt{9x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{9x^2+3x+2}+\sqrt{9x^2-x}}\cdot$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{|x|\sqrt{\left(9+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+|x|\sqrt{\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{-x\sqrt{\left(9+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x\sqrt{\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{2}{x}}{-\sqrt{\left(9+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{4+0}{-\sqrt{(9+0+0)}-\sqrt{(9-0)}} = \frac{4}{-3-3} = -\frac{2}{3}$$

Contoh Soal 1.4.4

Hitung $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$

Jawab:

Perhatikan bahwa, $x \to \infty$ maka $x > 0$. Dan untuk $x > 0$, berlaku

$$\begin{aligned} -1 \leq &\quad \cos x \quad \leq 1 \\ \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{x} \leq &\quad \frac{\cos x}{x} \quad \leq \tfrac{1}{x} \\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(-\tfrac{1}{x}\right) \leq &\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow \quad 0 \leq &\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Maka, berdasarkan teorema apit, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = 0.$$

Contoh Soal 1.4.5

Hitung $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ \cos\frac{1}{x}$

Jawab:

Misalkan $y = \frac{1}{x}$. Jika $x \to 0^+$, maka $y \to \infty$.

Akibatnya,

$$\lim_{x\to 0} x\ \cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\cos y}{y} = 0$$

(*menggunakan jawaban Contoh Soal* 1.4.4)

Contoh Soal 1.4.6

Hitung $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin 5x}$

Jawab:

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}.\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}.\sin 5x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{x}.\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{5.\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{0}{5\,.\,1} = 0$$

(*menggunakan jawaban Contoh Soal* 1.4.5)

Rangkuman Materi 1.4.2

Limit Bernilai Tak Hingga

Suatu limit bisa saja menghasilkan nilai ∞ atau $-\infty$. Ekspresi

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

memiliki arti bahwa ketika nilai x mendekati c, maka nilai $f(x)$ akan membesar tanpa batas.

Sementara itu, ekspresi

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

memiliki arti bahwa ketika nilai x mendekati c, maka nilai $f(x)$ akan mengecil tanpa batas (bernilai sangat negatif).

Contoh Soal 1.4.7

Tentukan apakah limit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ bernilai $+\infty$, $-\infty$, atau tidak ada.

Jawab:

Ketika $x \to 0^+$, penyebut tetap positif menuju nol, sedangkan pembilang adalah 1 untuk semua x. Sehingga, hasil bagi $\frac{1}{x}$ dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi x berada dekat tetapi di kanan. Dengan demikian, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Sedangkan, ketika $x \to 0^-$, penyebut bernilai negatif menuju nol, sedangkan pembilang adalah 1 untuk semua x. Dengan demikian, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Akibatnya, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ tidak ada.

Contoh Soal 1.4.8

Tentukan apakah limit $\lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x^2}$ bernilai $+\infty$, $-\infty$, atau tidak ada.

Jawab:

Ketika $x \to 0^+$, penyebut tetap positif menuju nol, sedangkan pembilang menuju -2.

Dengan demikian, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$. Kemudian, ketika $x \to 0^-$, penyebut tetap positif menuju nol, sedangkan pembilang menuju -2. Dengan demikian, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$.

Jadi, $\lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$

Contoh Soal 1.4.9

Tentukan apakah limit $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-3}$ bernilai $+\infty$, $-\infty$, atau tidak ada.

Jawab:

Ketika $x \to 3^-$, penyebut bernilai negatif menuju nol, sedangkan pembilang menuju 5.

Jadi, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$. $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty$

Latihan Soal

Hitung nilai limit berikut

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x-3}{2+x}$
2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{2x^2+x^3}$
3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-3}$
4. $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$
5. $\lim_{x \to 0} 7x^2 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin 9x}$
6. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{3x-5}$
7. $\lim_{t \to -\infty} \frac{t^2+5t}{t^3+7}$

8. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{10^{100}+2\sqrt{x}}{\sqrt{1+4x}}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$

10. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\cos t+100}{t+1}$

11. $\lim\limits_{t\to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2}$

12. $\lim\limits_{t\to 4^-} \dfrac{t^2}{t^2-16}$

13. $\lim\limits_{\theta\to\pi^+} \dfrac{\theta}{1+\cos\theta}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4-5x+8x^2}}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4-5x+8x^2}}{x}$

1.5 Asimtot

Rangkuman Materi 0.1

Asimtot Tegak

Garis $x = c$ adalah asimtot tegak grafik $y = f(x)$, jika salah satu dari empat pernyataan berikut benar.

1. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
3. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
4. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval buka yang mengandung c. Fungsi f **kontinu** di titik $x = c$, jika $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

(Note: Seringkali kita mempunyai asimtot tegak pada titik yang bersifat bahwa penyebut 0)

Asimtot Datar

Garis $y = b$ adalah asimtot datar grafik $y = f(x)$, jika salah satu dai pernyataan berikut berlaku.

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Latihan Soal

Tentukan asimtot datar dan asimtot tegak untuk grafik fari fungsi berikut.

1. $f(x) = \frac{3}{x+1}$
2. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
3. $f(x) = \frac{14}{2x^2+7}$
4. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

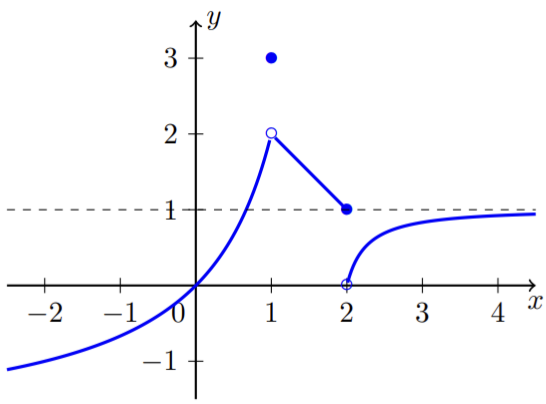
1.6 Kekontinuan

Rangkuman Materi 1.6.1

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval buka yang mengandung c. Fungsi f **kontinu** di titik $x = c$, jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Lebih lanjut, fungsi f dikatakan kontinu pada $\mathbb{R}$, jika f kontinu setiap $x \in \mathbb{R}$.

Perhatikan gambar grafik g berikut



Gambar 2

Pada Gambar 2, fungsi g kontinu di x = 0, sebab $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$.

Sedangkan, fungsi g tidak kontinu di titik x = 1, sebab $\lim_{x\to 1} g(x) = 2 \neq 3 = g(1)$.

Apakah fungsi g kontinu di x = 2?

Tentukan semua interval di mana fungsi g kontinu!

Contoh Soal 1.6.1

Tentukan nilai a dan b sehingga fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x + a & , x > 1 \\ b & , x = 1 \\ 4x^2 - 8, & x < 1 \end{cases}$ kontinu di setiap bilangan real.

Jawab:

Karena fungsi piecewise f di atas berbentuk polinom di setiap potongannya, maka cukup memastika f kontinu di $x = 1$. Fungsi f kontinu di $x = 1$, jika $\lim_{x\to 1} f(x)$ ada dan bernilai sama dengan $f(1)$.

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ada jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} f(x) \\ \lim_{x\to 1^+} (2x+a) &= \lim_{x\to 1^-} \left(4x^2-8\right) \\ 2(1)+a &= 4(1)^2-8 \\ 2+a &= 4-8 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

Karena $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$, maka

$$b = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(4x^2-8\right) = -4$$

Jadi, nilai $a = -6$ dan $b = -4$.

Rangkuman Materi 1.6.2

Teorema Nilai Antara

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ dan misalkan W bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$. Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat paling sedikit sebuah bilangan c di antara a dan b, sedemikian sehingga $f(c) = W$.

Latihan Soal

1. Tentukan nilai a sehingga fungsi berikut kontinu

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{x-6}, & x \neq 6 \\ a, & x = 6 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} a^2x+10, & x < 3 \\ 4x+5a, & x \geq 3 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+a & ,x<1 \\ \dfrac{\sin(ax-a)}{x^2-1} & ,x\geq 1 \end{cases}$

2. Hitung limit-limit berikut atau jelaskan mengapa limit tersebut tidak ada.

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2x-4|}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|2x-4|+x^2-4}{x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\ 2x+1$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\!\left[\dfrac{2x+1}{3}\right]\!\right]$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right]$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$

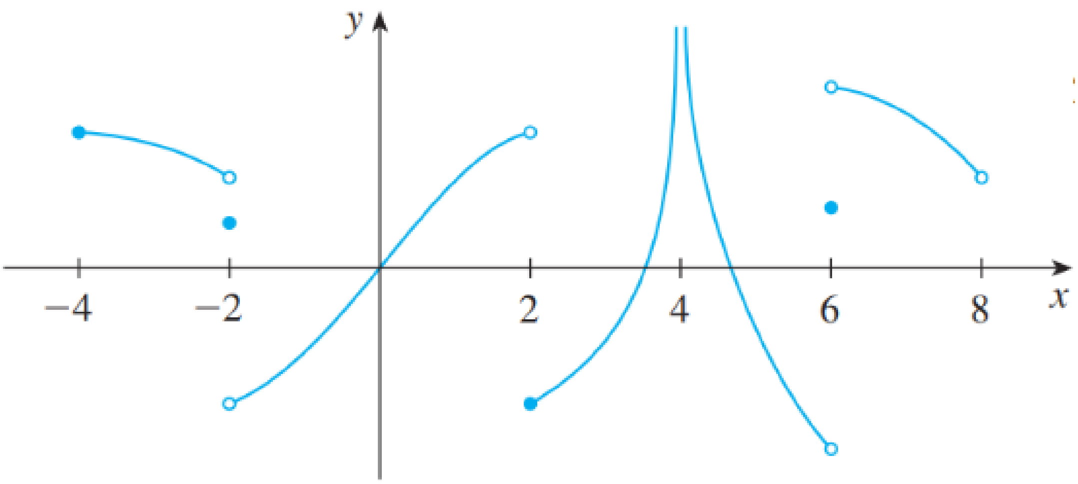
(g) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\left(\dfrac{3}{x^2}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{10^{10}}\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(j) $\lim\limits_{t\to\infty} 2\cos(3t)$

3. Diberikan fungsi f dengan grafik sebagai berikut:



Tentukan semua interval di mana fungsi f kontinu

4. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi masing-masing kesamaan berikut ini.

(a) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=7$

(b) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4}=\dfrac{1}{8}$

BAB 2
TURUNAN

2.1 Pengantar : Garis Singgung dan Kecepatan Sesaat

Konsep Turunan pada awalnya muncul dari dua masalah yang cukup berbeda. Dua masalah tersebut adalah masalah Garis Singgung yang berkaitan dengan geometri dan masalah Kecepatan Sesaat yang berkaitan dengan fisika.

Rangkuman Materi 2.1.1

Garis Singgung

Suatu garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P\ (c, f(c))$ merupakan suatu garis yang melewati titik P dan bergradien

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan nilai limit ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

Contoh Soal 2.1.1

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2$ di titik $P\ (1,3)$.

Jawab:

Untuk mengerjakan soal di atas, kita perlu menghitung gradien garis singgungnya terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 3(1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 6 + 3h = 6 \end{aligned}$$

Kita telah dapatkan gradien garis singgungnya yaitu $m = 6$. Selanjutnya kita akan menentukan persamaan garis singgungnya. Ingat bahwa persamaan garis bergradien m yang melewati (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ingat juga bahwa dalam kasus ini garis singgung juga melewati titik P (1,3) sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 3 = 6(x - 1)$$

$$y = 6x - 3$$

Rangkuman Materi 2.1.2

Kecepatan Sesaat

Jika suatu objek bergerak pada garis koordinat dengan fungsi posisi $f(t)$, maka kecepatan sesaatnya Ketika $t = c$ adalah

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan nilai limit ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

Contoh Soal 2.1.2

Misalkan suatu objek jatuh bebas dari ketinggian dikarenakan adanya gaya gravitasi. Diberikan fungsi posisi benda yaitu $f(t) = 5t^2$ dengan $f(t)$ dalam meter dan t dalam detik. Hitunglah kecepatan sesaat Ketika $t = 5$ detik.

Jawab:

Kecepatan sesaat dapat dihitung dengan menggunakan limit berikut

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(5+h)^2 - 5(5)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(25 + 10h + h^2) - 5(5)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{125 + 50h + 5h^2 - 125}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{50h + 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 50 + 5h = 50$$

Jadi, didapatkan kecepatan sesaat Ketika $t = 5$ detik yaitu 50 meter/detik.

Perhatikan bahwa bentuk limit pada dua masalah diatas cukup mirip walaupun konteks permasalahannya cukup berbeda jauh. Bentuk limit diatas lah yang nantinya digunakan untuk mendefinisikan **Turunan**.

Latihan Soal

1. Diberikan kurva $y = x^2 + 1$. Tentukan gradien garis singgung di titik $(2,5)$ dan $(1,2)$.
2. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 3x$ Ketika $x = -1$, $x = 0$, dan $x = 1$.
3. Tinjau kurva $y = x^3 - 1$. Tentukan persamaan garis singgung di titik $(2,7)$.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

4. Tinjau kurva $y = x^2 - 2x$. Tentukan persamaan garis singgung di titik $(2,0)$ dan gambarkan grafik persamaannya disertai garis singgungnya.
5. Suatu objek bergerak dalam suatu lintasan dengan fungsi posisinya $s(t) = 3t^2 + 2$ dengan $s(t)$ dalam meter dan t dalam detik. Tentukan kecepatan sesaat ketika $t = 2$!
6. Ketika suatu partikel bergerak dalam garis koordinat dengan fungsi posisi $f(t) = -t^2 + 8t$, kapan partikel tersebut berhenti sesaat?
7. Sebuah bola dijatuhkan dari ketingguan 80 meter. Ketinggian bola (meter) sebagai fungsi waktu t (detik) dinyatakan dengan $h(t) = 80 - 5t^2$
   a. Hitung kecepatan sesaat bola saat $t = 1$.
   b. Hitung kecepatan sesaat bola saat bola menyentuh tanah.

2.2 Konsep Turunan

Rangkuman Materi 2.2.1

Definisi Turunan

Turunan fungsi *f* adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

Bentuk limit di atas dapat juga dituliskan dengan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Rangkuman Materi 2.2.2

Keterdiferensiasian Mengimplikasikan Kontinuitas

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c .

Sebaliknya, jika f tidak kontinu di c, maka $f'(c)$ tidak ada.

Contoh Soal 0.1

Misalkan $f(x) = 13x - 6$. Hitung $f'(4)$ dengan menggunakan kedua definisi turunan.

Jawab:

Menggunakan definisi 1.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(13(4+h) - 6) - (13.(4) - 6)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

Menggunakan definisi 2.

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{13x - 13(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{13(x - 4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} 13 = 13$$

Latihan Soal

1. Hitung $f'(a)$ dengan menggunakan kedua definisi turunan:

   (i) $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ dan

   (ii) $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   untuk fungsi-fungsi f dan nilai a berikut.

   (a) $f(x) = 2x + 1$ dan $a = 1$.

   (b) $f(x) = x^2 - x$ dan $a = 2$.

   (c) $f(x) = \frac{3}{x}$ dan $a = \frac{3}{2}$.

2. Tentukan turuan fungsi berikut dengan menggunakan definisi turunan.

   (a) $f(x) = 7$

   (b) $f(x) = 2x - 5$

   (c) $f(x) = \sqrt{3x + 5}$

   (d) $f(x) = \sin(2x)$

3. Limit berikut menyatakan turunan dari fungsi f di titik a. Tentukan f dan a yang sesuai.

   (a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

   (b) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

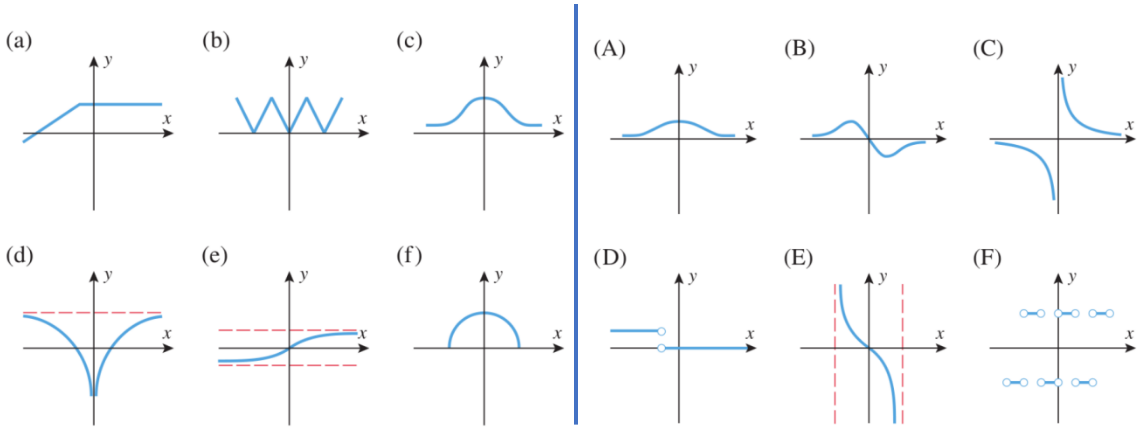
   (c) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$

   (d) $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{5}{(2+h)^2} - \frac{5}{4}}{h}$

   (e) $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(3h) - 1}{h}$

   (f) $\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1+h)}{h}$

4. Pasangkan grafik fungsi (a)-(f) berikut dengan grafik turunan (A)-(F).



5. Diketahui fungsi f, g dengan $f(2) = 4, f'(2) = 6, g(2) = 3$, dan $g'(2) = 5$.

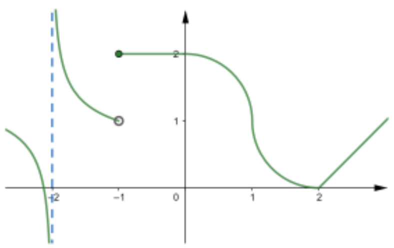
   Tentukan limit berikut dengan pertam kali menginterpretasikannya sebagai turunan dari suatu fungsi.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2f(x)-8}{x^2-4}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-g(x)-1}{x-2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)g(x)-12}{x-2}$

6. Diberikan grafik fungsi f sebagai berikut. Tentukan semua titik di daerah asal fungsi f di mana f tidak mempunyai turunan. Jelaskan jawaban Anda.



2.3 Aturan Penentuan Turunan

Rangkuman Materi 2.3.1

A. Teorema Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$, dengan k suatu konstanta, maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$; yakni

$$\frac{d}{dx}(k) = 0$$

B. Teorema Fungsi Satuan

Jika $f(x) = x$, maka untuk sebarang x, $f'(x) = 1$; yakni

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

C. Teorema Pangkat Bilangan Asli

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan asli, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

D. Teorema Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; yakni

$$\frac{d}{dx}[k \cdot f(x)] = k \cdot \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$$

E. Teorema Penjumlahan

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; yakni

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) + \frac{d}{dx}\big(g(x)\big)$$

F. Teorema Pengurangan

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; yakni

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) - \frac{d}{dx}\big(g(x)\big)$$

G. Teorema Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

yakni

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)g(x) + f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)$$

H. Teorema Hasil Bagi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

yakni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)g(x) - f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Contoh Soal 2.3.1

Carilah turunan dari $2x^3 + 12x - 7$

Jawab:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 + 12x - 7\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 + 12x\right) - \frac{d}{dx}(7) \qquad \text{(Teorema F)}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2x^3\right) + \frac{d}{dx}(12x) - \frac{d}{dx}(7) \qquad \text{(Teorema E)}$$

$$= 2\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + 12\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(7) \qquad \text{(Teorema D)}$$

$$= 2 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 1 - 0 \qquad \text{(Teorema C, B, A)}$$

$$= 6x^2 + 12$$

Contoh Soal 2.3.2

Carilah turunan dari $(x^3 - 2x)(7x^2 - 1)$ dengan menggunakan aturan hasil kali.

Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\left(x^3-2x\right)\left(7x^2-1\right)\right] &= \frac{d}{dx}\left(x^3-2x\right)\cdot\left(7x^2-1\right)+\left(x^3-2x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(7x^2-1\right)\\ &= \left(3x^2-2\right)\cdot\left(7x^2-1\right)+\left(x^3-2x\right)\cdot\left(14x\right)\\ &= 21x^4-3x^2-14x^2+2+14x^4-28x^2\\ &= 35x^4-45x^2+2\end{aligned}$$

Contoh Soal 2.3.3

Diberikan bilangan asli n, tentukan turunan dari x^{-n} dengan menggunakan aturan hasil bagi

Jawab:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(1)\cdot x^n-1\cdot\frac{d}{dx}\left(x^n\right)}{\left(x^n\right)^2}=\frac{0\cdot x^n-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}$$

Jadi, turunan dari x^{-n} adalah $-nx^{-n-1}$

Rangkuman Materi 0.1

Teorema Pangkat Bilangan Bulat Tak Nol

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat tak nol, $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut menggunakan aturan turunan

   (a) $f(x)=e^{3x}\left(x^4-x\right)$

   (b) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}$

   (c) $f(x)=\frac{x^3-4x+1}{x^4-1}$

   (d) $f(x)=\frac{\left(x^2+2\right)\left(x^3-1\right)}{x^4+1}$

2. Jika $f(2) = 5, f'(2) = 3, g(2) = -4, g'(2) = 6$ dan $h(x) = (x^2 + 1)g(x)/f(x)$, maka hitung turunan berikut.
   (a) $(h)'(2)$
   (b) $(f + g)'(2)$
   (c) $(f - g)'(2)$
   (d) $(f \cdot g)'(2)$
   (e) $(f/g)'(2)$
   (f) $(g^2/g)'(2)$
3. Tentukan persamaan garis singgung grafik $f(x) = x^2 - x$ di titik $P(1,0)$.

4. Tentukan semua titik pada grafik fungsi berikut sehingga garis singgung pada titik tersebut sejajar dengan sumbu-x.
   (a) $f(x) = x^3 - 27x$
   (b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

2.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Rangkuman Materi 2.4.1

Fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ keduanya dapat diturunkan dengan turunan fungsinya

$$f'(x) = \cos x$$
$$g'(x) = -\sin x$$

Fungsi trigonometri lain juga dapat diturunkan di domainnya masing-masing. Misalkan diberikan $f(x) = \tan x$, $g(x) = \cot x$, $p(x) = \sec x$, dan $q(x) = \csc x$, maka turunan fungsi-fungsi tersebut adalah

$$f'(x) = \sec^2 x$$
$$g'(x) = -\csc^2 x$$
$$p'(x) = \sec x \tan x$$
$$q'(x) = -\csc x \cot x$$

Contoh Soal 2.4.1

Diberikan $f(x) = x^2 \cos x$. Tentukan $f'(x)$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = u(x)v(x)$ dengan $u(x) = x^2$ dan $v(x) = \cos x$. Maka berdasarkan aturan perkalian, didapatkan turunan fungsi f yaitu

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x \cos x + x^2(-\sin x) \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

Contoh Soal 2.4.2

Tentukan persamaan garis singgung grafik $y = \tan x$ di titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

Jawab:

Perhatikan bahwa turunan dari $y = \tan x$ adalah $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$. Ketika $x = \frac{\pi}{4}$, turunannya bernilai

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

Sehingga didapatkan persamaan garis singgungnya yaitu

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

Fakta unik turunan fungsi trigonometri : Turunan fungsi $f(x) = \sin^2 x$ adalah $f'(x) = \sin 2x$, seolah olah angka 2 nya turun ! Tidak percaya? Coba buktikan!

Latihan Soal

1. Gunakan identitas trigonometri dan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ dan } f(\theta) = cos(2\theta).$$

2. Tentukan $f'(x)$, fungsi f berikut.

   (a) $f(x) = \cos^2 x$

   (b) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

   (c) $f(x) = \sin x \tan x$

   (d) $f(x) = \tan^2 x$

   (e) $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

   (f) $f(x) = 4\cos x + 5\sin x$

   (g) $f(x) = 2\cot x - 3\csc x$

   (h) $f(x) = \sin x \cos x$

   (i) $f(x) = 3\sec x \tan x$

   (j) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

3. Tentukan persamaan garis singgung grafik $f(x) = 1 + 2\tan x$ di titik $P\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$.

4. Misalkan $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x + \cos(2x), -\pi \le x \le \pi$. Tentukan semua titik pada grafik $y = f(x)$ di mana garis singgungnya sejajar sumbu x!

2.5 Aturan Rantai

Rangkuman Materi 2.5.1

Teorema Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g dapat diturunkan di x dan f dapat diturunkan di $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$, yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, dapat diturunkan di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh Soal 2.5.1

Jika $y = (3x^2 - 4x - 1)^{23}$, carilah y'.

Jawab:

Misalkan $u = 3x^2 - 4x - 1$, maka $y = u^{23}$. Dengan demikian

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 23u^{22} \cdot (6x-4) = 23(3x^2 - 4x - 1)^{22}(6x-4).$$

Contoh Soal 2.5.2

Jika $y = \cos 5x$, carilah y'.

Jawab:

Misalkan $u = 5x$, maka $y = \cos u$. Dengan demikian

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot (5) = -5\sin 5x$$

Latihan Soal

1. Diberikan tabel berikut:

x	1	3	4
$f(x)$	2	4	1
$f'(x)$	5	7	4
$g(x)$	3	4	6
$g'(x)$	2	4	3

Hitung

a. $(f \circ g)'(1)$

b. $(g \circ f)'(3)$

c. $(f \circ f)'(4)$

d. $(g \circ g)'(3)$

2. Tentukan turunan fungsi berikut

(a) $y=(2+3x)^{15}$

(b) $y=\tan(x^2+x)$

(c) $y=\dfrac{x}{(2x+1)^4}$

(d) $y=\sqrt{x\cos x}$

(e) $y=\sin^3(2x^2)$

(f) $y=\sin(x+\cos(x))$

(g) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$

(h) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+2)^3}$

2.6 Turunan Tingkat Tinggi.

Operasi turunan mengambil sebuah fungsi f dan menghasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika f' dapat diturunkan, maka turuna fungsi f', dinyatakan oleh f'', disebut turunan kedua fungsi f. Jika f''dapat diturunkan, maka turunan fungsi f'', dinyatakan oleh f''', disebut turunan ketiga fungsi f. Turunan keempat fungsi f dinyatakan $f^{(4)}$, Turunan keempat fungsi f dinyatakan $f^{(4)}$, dan seterusnya. Notasi turunan tingkat tinggi fungsi $y = f(x)$ terhadap x sebagai berikut.

Rangkuman Materi 2.6.1

TURUNAN	NOTASI f'	NOTASI y'	NOTASI D	NOTASI LEIBNIZ
PERTAMA	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
KEDUA	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
KETIGA	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
KEEMPAT	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
KE-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh Soal 2.6.1

Jika $y = \cos 3x$, carilah $\frac{d^3y}{dx^3}$ dan $\frac{d^6y}{dx^6}$.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = -3\sin 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3^2\cos 3x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3^3\sin 3x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 3^4\cos 3x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -3^5\sin 3x$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -3^6\cos 3x$$

Rangkuman Materi 2.6.2

Perubahan kecepatan sesaat terhadap waktu disebut percepatan. Jika percepatan dinyatakan oleh a, maka

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Contoh Soal 2.6.2

Sebuah benda bergerak di sepanjang garis koordinat sehingga posisinya s memenuhi $s = 3t^2 - 12t + 5$, dimana s diukur dalam cm dan t dalam detik dengan $t \geq 0$. Tentukan kecepatan dan percepatan benda ketika $t = 1$.

Jawab:

Kecepatan benda ketika t detik dinyatakan dengan $v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 12$.

Kemudian, percepatan benda ketika t detik dinyatakan dengan $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6$. Ini berarti bahwa kecepatan bertambah pada suatu tingkat yang tetap sebesar 6 cm/detik setiap detik yang dituliskan dengan 6 cm/detik^2.

Jadi, kecepatan dan percepatan benda ketika t = 1 berturut-turut adalah

$$v(1) = 6(1) - 12 = -12 \text{ cm/detik}$$

$$a(1) = 6 \text{ cm/detik}^2$$

Latihan Soal

1. Tentukan $f''(x)$ dengan fungsi f diberikan sebagai berikut:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$
   (b) $f(x) = (2x + 1)^4 + \tan x$
   (c) $f(x) = 2x^2 + x + \cos x + \frac{\sin x}{x}$
2. Jika $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, cari kecepatan benda bergerak tersebut ketika percepatannya nol.

2.7 Turunan Implisit

Rangkuman Materi 2.7.1

Penurunan implisit adalah suatu metode untuk menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari suatu persamaan dalam x dan y tanpa menentukan y sebagai fungsi dalam x secara eksplisit. Dengan menggunakan metode ini, kita dapat memperoleh hubungan antara x, y, dan $\frac{dy}{dx}$ dengan menurunkan kedua sisi persamaan

Contoh Soal 2.7.2

Diberikan suatu persamaan $y^2 - x^2 = 1$. Tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa kita tidak dapat menyatakan persamaan di atas dalam bentuk eksplisit ($y = f(x)$), namun asumsikan bahwa y merupakan fungsi terhadap x yang tidak kita ketahui. Tuliskan y sebagai $y(x)$ maka sehingga persamaan menjadi

$$[y(x)]^2 - x^2 = 1$$

Turunkan kedua ruas terhadap x, maka kita peroleh

$$\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

Terapkan aturan rantai, maka kita akan peroleh

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Perhatikan bahwa ekspresi $\frac{dy}{dx}$ memuat variable x dan y. Namun demikian, hal ini tidak menjadi masalah asalkan kita tahu nilai absis dan ordinat dari setiap titik yang mau kita cari turunannya.

Misalkan kita ingin mencari turunan $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ di titik $(\sqrt{2}, 1)$, maka tinggal substitusikan saja $x = \sqrt{2}$ dan $y = 1$ ke dalam ekspresi $\frac{dy}{dx}$ yang telah kita peroleh.

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(\sqrt{2},1)} = -\frac{\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$$

Contoh Soal 2.7.2

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan $\cos xy = x^2$

Jawab:

Turunkan kedua ruas terhadap x, maka kita peroleh

$$\frac{d}{dx}(\cos xy) = \frac{d}{dx}(x^2)$$

Terapkan aturan rantai, maka kita akan peroleh

$$\Rightarrow -\sin xy\left(\frac{d}{dx}(xy)\right) = 2x$$

$$\Rightarrow -\sin xy\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 2x$$

$$\Rightarrow -y\sin xy - x\sin xy\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow -x\sin xy\frac{dy}{dx} = y\sin xy + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y\sin xy + 2x}{-x\sin xy}$$

Pada bagian sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, dengan n sebarang bilangan bulat. Dengan turunan implisit, dapat ditunjukkan perluasan aturan pangkat dengan n adalah sebarang bilangan rasional.

Rangkuman Materi 2.7.2

Teorema pangkat bilangan raisonal

Diberikan sebarang bilangan rasional r. Untuk $x > 0$ berlaku

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}.$$

Jika r dapat dituliskan dalam bentuk paling sederhana sebagai $r = \frac{p}{q}$, dengan q ganjil, maka

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \text{ untuk semua } x.$$

Latihan Soal

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ persamaan berikut.
   (a) $y^3 - xy = x^2$
   (b) $xy = 1$
   (c) $xy^2 = 2x - 16$
   (d) $x^2y = 1 + y^2x$
   (e) $x\sqrt{y+1} = xy + x^2$
   (f) $x^2 + \sin(xy) - y^2 = 0$
   (g) $y^3 + y = x^5 - 4$
   (h) $y^2 + 2y = 3x - 2$
   (i) $x^{\frac{4}{5}} + y^{\frac{4}{5}} = 1$
   (j) $xy^3 + \sqrt{y} = 3x^2 + 1$
   (k) $xy = \cos xy$
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva persamaan berikut di titik P. (Petunjuk : Hitung gradien garis singgung di titik P dengan metode turunan implisit, lalu gunakan gradien tersebut untuk menentukan persamaan garisnya).
   (a) $x^2y^2 + 3x = 4y,\ P = (1,1)$
   (b) $x^3y + y^3x = 30\ \ P = (1,3)$
   (c) $\sin xy = y, P = (\pi/2,1)$
   (d) $y^2 + xy = 4,\ P = (3,1)$
   (e) $\tan xy = y,\ P = (\pi/2,1)$

2.8 Laju yang Berkaitan

Misalkan kita punya beberapa kuantitas yang berubah terhadap waktu, contohnya volume air dalam wadah, jarak suatu benda terhadap benda lainnya, dan sudut yang dibentuk oleh ketiga titik berbeda. Dalam beberapa kondisi, kuantitas tersebut dapat memiliki kaitan antara satu dengan yang lainnya dalam bentuk persamaan.

Misalkan x, y, dan z merupakan kuantitas yang berubah terhadap waktu dan memiliki kaitan yang dinyatakan dalam persamaan berikut

$$x^2 = y^2 + 2z$$

Ketika kita terapkan penurunan implisit ke persamaan diatas dengan menerapkan operator turunan $\frac{d}{dt}$ pada kedua ruas, kita akan peroleh

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{d}{dt}(y^2 + 2z)$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt}$$

Rangkuman Materi 2.8.1

Perhatikan bahwa persamaan diatas mengaitkan beberapa laju kuantitas yaitu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, dan $\frac{dz}{dt}$. Laju kuantitas inilah yang kita sebut sebagai **Laju yang Berkaitan**.

Ada 5 langkah yang sebaiknya dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan laju yang berkaitan diantaranya :

1. Sketsa situasi yang terjadi pada soal serta definisikan seluruh kuantitas dalam variabel.
2. Identifikasi kuantitas yang berubah terhadap waktu.
3. Tentukan kaitan antara kuantitas-kuantitas tersebut.
4. Tentukan kaitan antara laju perubahan dari kuantitas-kuantitas tersebut dengan menurunkannya secara implisit.

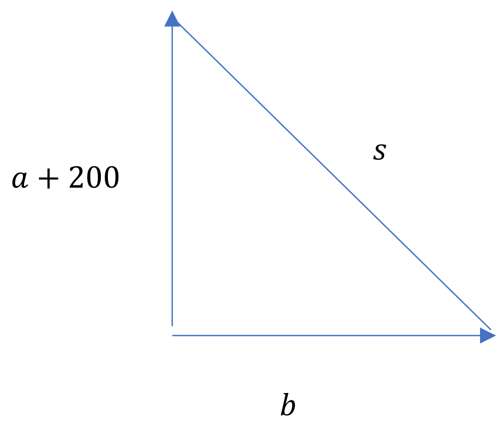
Tentukan laju perubahan salah satu kuantitas dengan menggunakan laju perubahan kuantitas lain yang diketahui.

Contoh Soal 0.1

Pesawat A terbang ke arah utara dengan laju 800 Km/Jam melintas di atas pusat kota pada pukul 12.00. Pesawat B terbang ke arah timur dengan laju 750 Km/Jam melintas di atas pusat kota pada pukul 12.15. Jika kedua pesawat tersebut terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat jarak di antara kedua pesawat tersebut bertambah pada pukul 13.15?

Jawab:

Misalkan t merupakan total durasi setelah pukul 12.15. Misalkan pula a merupakan jarak yang ditempuh pesawat A dari pusat kota setelah pukul 12.15 dan b merupakan jarak yang ditempuh pesawat B dari pusat kota setelah pukul 12.15. Perhatikan bahwa pesawat A telah lebih dulu melewati pusat kota, sehingga pada pukul 12.15, pesawat A telah menempuh jarak $\frac{1}{4}(800) = 200\ km$. Selain itu, kita juga memisalkan s sebagai jarak antara kedua pesawat, dan situasi yang terjadi dapat diilustrasikan dengan gambar dibawah ini.



1. Perhatikan bahwa a,b dan s merupakan kuantitas yang berubah terhadap waktu karena kedua pesawat terus bergerak menjauhi pusat kota seiring berjalannya waktu
2. Kaitan ketiga kuantitas tersebut dapat dinyatakan berdasarkan Teorema Pythagoras yaitu

$$s^2 = (a + 200)^2 + b^2$$

3. Terapkan turunan implisit, sehingga kita dapatkan kaitan antara laju-laju dari kuantitas dalam soal.

$$2s\frac{ds}{dt} = 2(a + 200)\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt}$$

4. Berdasarkan persamaan di atas, kita akan mencari $\frac{ds}{dt}$ saat $t = 1$ (Pukul 13.15 adalah 1 jam setelah pukul 12.15). Berdasarkan soal, kita tahu bahwa laju pesawat A adalah

800 Km/Jam sehingga $\frac{da}{dt} = 800$ dan laju pesawat B adalah 750 Km/Jam sehingga $\frac{db}{dt} = 750$. Selanjutnya, kita akan mencari nilai a, b, dan s saat $t = 1$. Perhatikan bahwa

$$a(1) = v_A \cdot t = \frac{da}{dt} \cdot t = 800 \cdot 1 = 800$$

$$b(1) = v_B \cdot t = \frac{db}{dt} \cdot t = 750 \cdot 1 = 750$$

$$s(1)^2 = (a(1) + 200)^2 + b(1)^2$$

$$s(1)^2 = (800 + 200)^2 + 750^2$$

$$s(1) = \sqrt{1000^2 + 750^2} = 1250$$

Substitusikan nilai-nilai yang kita dapatkan ke persamaan pada Langkah nomor 4, sehingga kita akan dapatkan

$$2(1250)\frac{ds}{dt} = 2(800 + 200)800 + 2(750)750$$

$$2500\frac{ds}{dt} = 1600000 + 1125000$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2725000}{2500} = 1090$$

Sehingga kita dapatkan laju perubahan jarak kedua pesawat adalah 1090 Km/Jam.

Latihan Soal

1. Sebuah tangga yang panjangnya 3 meter bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga didorong mendatar mendekati dinding dengan laju tetap 0,1 m/ detik, seberapa cepatkah ujung atas tangga bergeser naik pada saat ujung bawah tangga berjarak 2 m dari dinding?

2.9 Diferensial dan Aproksimasi Linear

Rangkuman Materi 2.9.1

Diferensial

Misalkan $y = f(x)$ suatu fungsi.

Diferensial variable x, kita notasikan dengan dx, adalah perubahan pada variabel x

$$dx = \Delta x$$

Diferensial variable y, kita notasikan dengan dy, adalah perubahan pada variabel x

$$dy = f'(x)dx$$

Diferensial untuk Aproksimasi

Misalkan Kembali $y = f(x)$ suatu fungsi dengan nilai $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$ yang mudah dihitung. Dengan menggunakan diferensial kita dapat menaksir nilai fungsi di sekitar x_0 yang mungkin sulit untuk dihitung. Misalkan $x_1 = x_0 + \Delta x$ dengan $f(x_1)$ sulit dihitung dan $\Delta x \approx 0$, kita dapat menaksir nilai $f(x_1)$ dengan cara

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Contoh Soal 2.9.1

Dengan menggunakan diferensial, taksirlah nilai $\sqrt{4.05}$

Jawab:

Pertama-tama definisikan fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan titik $x_1 = 4.05$. Pilih $x_0 = 4$ sehingga $\Delta x = 0.05$. Perhatikan bahwa $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sehingga kita dapat tentukan nilai $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$ dengan mudah yaitu

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Dengan menggunakan diferensial, dapat ditaksir nilai $\sqrt{4.05}$ yaitu

$$\sqrt{4.05} = f(4.05) \approx f(4) + f'(4)\Delta x = 2 + 0.25(0.05) = 2.0125$$

Rangkuman Materi 2.9.2

Aproksimasi Linear

Misalkan $f(x)$ suatu fungsi yang dapat diturunkan di $x = a$, maka fungsi linear

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

merupakan aproksimasi linear fungsi $f(x)$ di $x = a$. Fungsi ini sangat baik untuk menghampiri nilai $f(x)$ di sekitar $x = a$.

Contoh Soal 2.9.2

Tentukan aproksimasi linear fungsi $G(x) = x + \sin 2x$ di $x = \pi/2$

Jawab:

Pertama, tentukan turunan $G(x)$

$$G'(x) = 1 + 2\cos 2x$$

Selanjutnya hitung $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dan $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$$

$$G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2(-1) = -1$$

Kemudian, tentukan aproksimasi linearnya yaitu

$$L(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right) + G'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -x + \pi$$

Kita dapatkan aproksimasi linearnya yaitu $L(x) = -x + \pi$

Latihan Soal

1. Tentukan aproksimasi linear $h(x) = \sin x + \cos x$ di $a = \pi/3$
2. Tentukan aproksimasi linear fungsi $g(x) = \sqrt{x+3}$ di $a = 1$ dan gunakan aproksimasi tersebut untuk menaksir $\sqrt{4.1}$.

BAB 3

PENGGUNAAN TURUNAN

3.1 Maksimum dan Minimum

Seringkali kali kita perlu mencari cara terbaik dalam menyelesaikan suatu permasalahan praktis. Kadangkala permasalahan yang dihadapi dapat juga dirumuskan sedemikian rupa sehingga melibatkan pemaksimuman dan peminimuman suatu fungsi pada suatu himpunan yang telah ditentukan.

Misalkan diberikan fungsi $f(x)$ dengan daerah asal S. Apakah $f(x)$ memiliki nilai maksimum atau minimum di S? Jika $f(x)$ mempunyai suatu nilai maksimum atau minimum, di manakah nilai-nilai tersebut dicapai? Jika nilai-nilai itu ada, berapakah nilai-nilai maksimum dan minimum itu?

Rangkuman Materi 3.1.1

Definisi

Misalkan S, daerah asal f, mengandung titik c. Kita katakan bahwa

(i) $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S,

(ii) $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S,

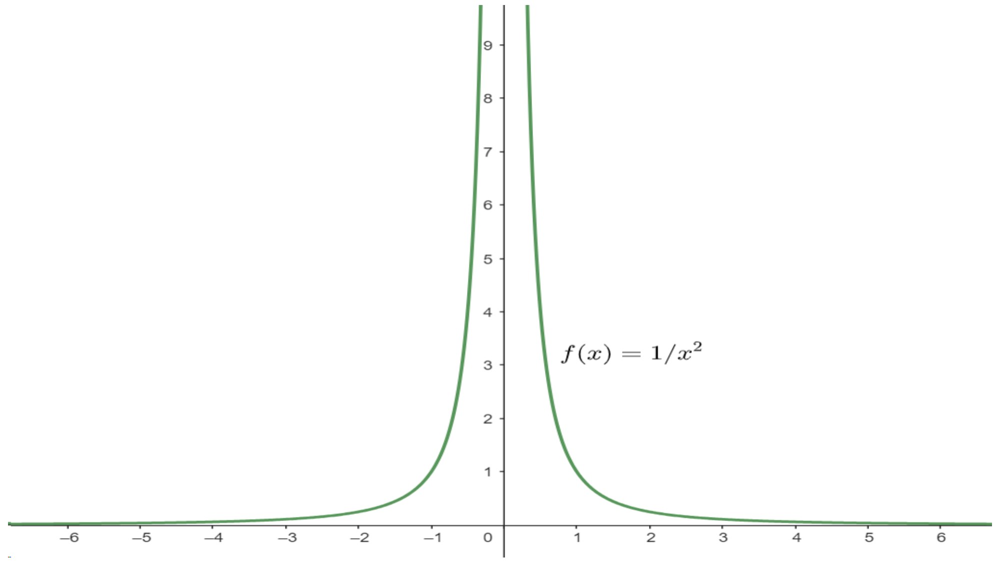
(iii) $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum,

(iv) Fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan adalah **fungsi objektif**.

(v) Titik c dimana f mencapai maksimum atau minimum disebut sebagai **titik ekstrim**.

Apakah setiap fungsi f mempunyai nilai maksimum (atau Minimum) pada S?

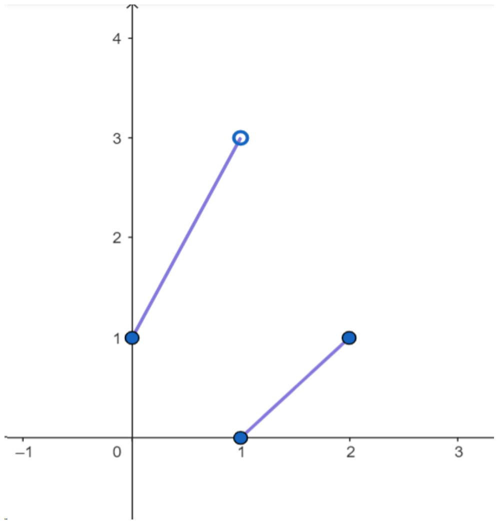
Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ berikut!



1. Apakah $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $S = (0, \infty)$?
2. Apakah $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $S = [1,2]$?
3. Apakah $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $S = (1,2]$?

Adakah syarat yang dapat menjamin f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum di S?

Perhatikan grafik fungsi $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & jika\ 0 \le x < 1 \\ x-1, & jika\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ berikut!



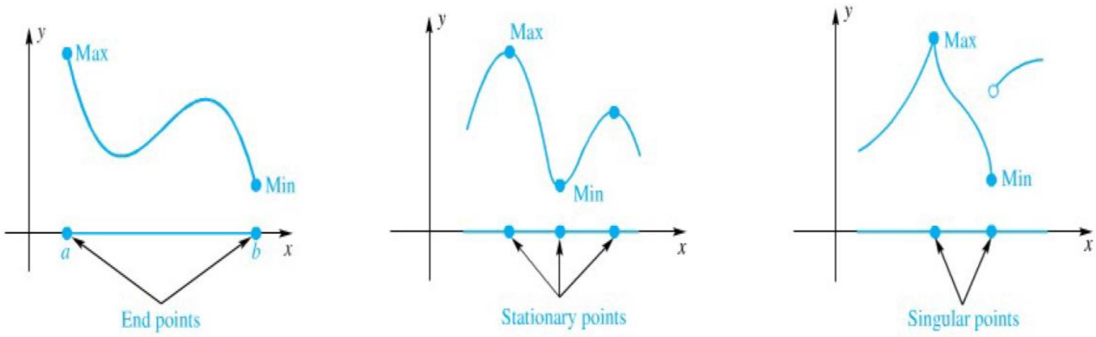
Apakah $g(x) = \begin{cases} 2x, & jika\ 0 \le x < 1 \\ x-1, & jika\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[1,2]$?

Rangkuman Materi 3.1.2

Teorema Keberadaan Maks-Min

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a,b]$.

Perhatikan gambar-gambar berikut.



Di mana terjadinya nilai-nilai ekstrim?

Rangkuman Materi 3.1.3

Teorema Titik Kritis

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c adalah titik kritis, yaitu salah satu dari tiga kemungkinan berikut

- titik ujung interval I,
- titik stasioner fungsi f, yaitu titik c yang memenuhi persamaan $f'(c) = 0$,
- titik singular fungsi f, yaitu titik c sedemikian hingga $f'(c)$ tidak ada.

Berdasarkan Teorema Keberadaan Maks-MIn dan Teorema Titik kritis, maka dalam menentukan nilai ekstrim fungsi kontinu pada interval tertutup sebagai berikut.

1. Tentukan titik-titik kritis fungsi tersebut.
2. Bandingkan nilai fungsi di titik-titik kritis fungsi tersebut, cari yang terbesar atau yang terkecil.

*Ingat bahwa prosedur ini hanya berlaku untuk **fungsi kontinu** di suatu **interval tertutup**!*

Contoh Soal 0.1

Tentukan nilai minimum fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 5$ di interval $[1,6]$

Jawab:

Perhatikan bahwa titik-titik kritis dari fungsi diatas adalah

- Titik batas yaitu $x = 1$ dan $x = 6$.
- Titik stasioner yaitu $x = c$ yang memenuhi persamaan $f'(c) = 0$. Kita tahu bahwa $f'(x) = 2x - 3$, sehingga titik stasioner bisa kita dapatkan dengan menyelesaikan persamaan

$$2c - 3 = 0$$

$$c = \frac{3}{2}$$

- Fungsi f tidak memiliki titik singular karena f' terdefinisi di interval $[1,6]$

Selanjutnya kita coba bandingkan nilai-nilai fungsi di titik kritis

- $f(1) = (1)^2 - 3(1) + 5 = 3$
- $f(6) = (6)^2 - 3(6) + 5 = 23$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{11}{4}$ (Nilai minimum)

Sehingga kita dapatkan nilai minimum fungsi adalah $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{4}$.

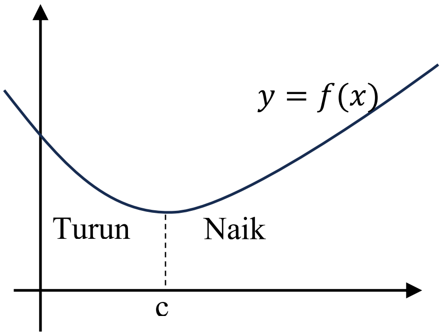
Latihan Soal

Tentukan semua titik kritis, nilai maksimum, dan nilai minimum dari fungsi berikut dalam interval tertutup yang diberikan.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10; [-2,1]$
2. $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}; [0,4]$
3. $g(x) = x + \cos(2x)\,; \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4. $h(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}};\ [-1,8]$

3.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Secara intuitif, suatu fungsi dikatakan monoton naik pada suatu interval jika grafik f naik dari kiri ke kanan pada interval tersebut. Sementara itu suatu fungsi dikatakan monoton turun pada suatu interval jika grafik f turun dari kiri ke kanan pada interval tersebut. Sebagai contoh, perhatikan gambar berikut.



Perhatikan bahwa secara visual fungsi di atas turun di kiri c dan naik di kanan c. Dengan demikian fungsi di atas turun pada interval $(-\infty, c)$ dan naik pada interval (c, ∞). Kemonotonan fungsi juga dapat kita definisikan secara matematis, sebagai berikut.

Rangkuman Materi 3.2.1

Definisi Kemonotonan

Misalkan f didefinisikan pada interval I.

(i) Fungsi f **monoton naik** pada interval I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$.

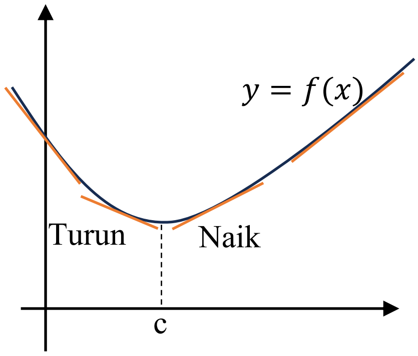
(ii) Fungsi f **monoton tak turun** pada interval I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(iii) Fungsi f **monoton turun** pada interval I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) > f(x_2)$.

(iv) Fungsi f **monoton tak naik** pada interval I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Bagaimana kita menentukan di mana suatu fungsi naik?

Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ berikut.



Rangkuman Materi 3.2.2

Teorema Kemonotonan

Misalkan f kontinu pada interval I dan terdiferensial pada setiap titik-dalam I, maka

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap titik-dalam I, maka f monoton naik pada I.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap titik-dalam I, maka f monoton turun pada I

Interval kemonotonan suatu fungsi f merupakan interval dimana fungsi tersebut monoton naik atau monoton turun. Interval kemonotonan dapat diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f'(x) > 0$ (untuk monoton naik) dan $f'(x) < 0$ (untuk monoton turun)

Contoh Soal 3.2.1

Tentukan interval kemonotonan dari $f(x) = x^2(2x - 3)$!

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi f juga dapat kita tuliskan dalam bentuk

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

Sehingga kita dapatkan turunan fungsinya

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

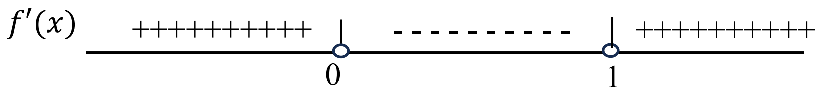
Selanjutnya selesaikan pertidaksamaan

$$6x^2 - 6x > 0$$

untuk menentukan interval monoton naik dan juga selesaikan pertidaksamaan

$$6x^2 - 6x < 0$$

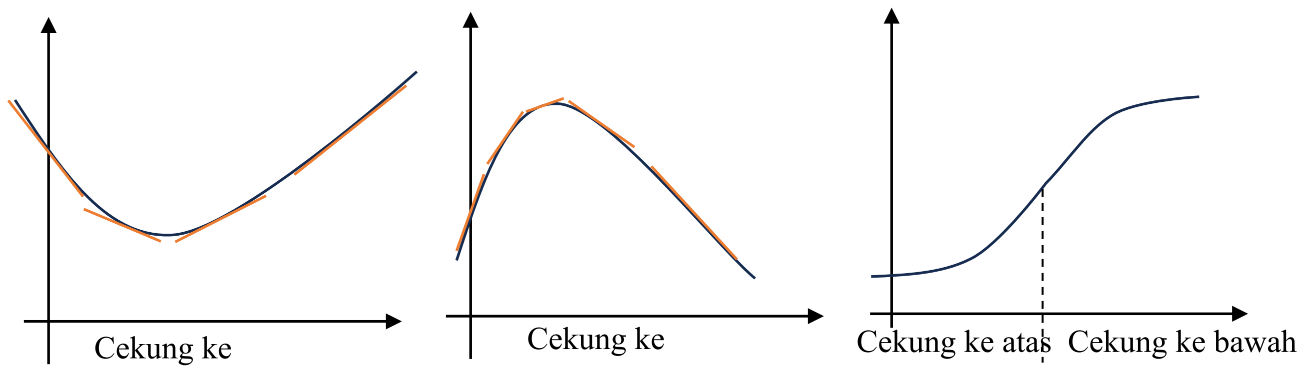
untuk menentukan interval monoton turun dari fungsi tersebut. Dengan menggunakan cara-cara menyelesaikan pertidaksamaan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita dapatkan hasil uji tanda seperti berikut



Sehingga diperoleh interval monoton naik yaitu $(-\infty, 0)$ dan $(1, \infty)$ dan interval monoton turun yaitu $(0,1)$.

Secara visual, fungsi yang cekung ke atas akan memiliki bentuk seperti mangkok, sedangkan fungsi yang cekung ke bawah akan memiliki bentuk seperti mangkok yang terbalik. Apabila kita tinjau bagaimana garis singgung berbelok saat bergerak dari kiri ke kanan di sepanjang grafik, maka

- jika garis singgung berbelok secara tetap dengan arah yang berlawanan arah putaran jarum jam, kita katakan bahwa grafik cekung ke atas,
- jika garis singgung berbelok secara tetap dengan arah yang searah putaran jarum jam, kita katakan bahwa grafik cekung ke bawah.



Secara matematis kita juga dapat mendefinisikan kecekungan fungsi sebagai berikut.

Rangkuman Materi 3.2.3

Definisi Kecekungan

Misalkan f terdiferensial pada interval terbuka I. Fungsi f dikatakan **cekung ke atas** pada interval I jika turunan fungsi f yakni $\boldsymbol{f'}$ **monoton naik** pada interval I. Serupa dengan yang sebelumnya, fungsi f dikatakan **cekung ke bawah** pada interval I jika turunan fungsi f yakni $\boldsymbol{f'}$ **monoton turun** pada interval I.

Berdasarkan Teorema Teorema Kemonotonan, kita dapat menentukan kecekungan sebagai berikut.

Rangkuman Materi 3.2.4

Teorema Kecekungan

Misalkan f dapat diturunkan dua kali pada interval terbuka I.

(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f cekung ke atas pada interval I.

(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f cekung ke bawah pada interval I.

Contoh Soal 0.1

Tentukan interval di mana fungsi $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ cekung ke atas atau cekung ke bawah!

Jawab:

Perhatikan bahwa turunan pertama fungsi f adalah

$$f'(x) = 2x^4 - 4x^2$$

Dan turunan kedua dari f adalah

$$f''(x) = 8x^3 - 8x$$

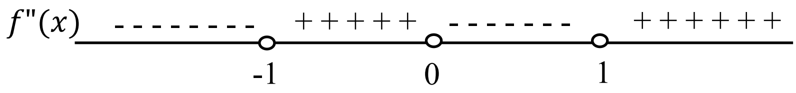
Untuk menentukan interval kecekungan, kita bisa langsung gunakan turunan keduanya. Selesaikan pertidaksamaan $f''(x) > 0$ atau

$$8x^3 - 8x > 0$$

untuk mencari interval monoton naik. Selesaikan juga pertidaksamaan $f''(x) > 0$ atau

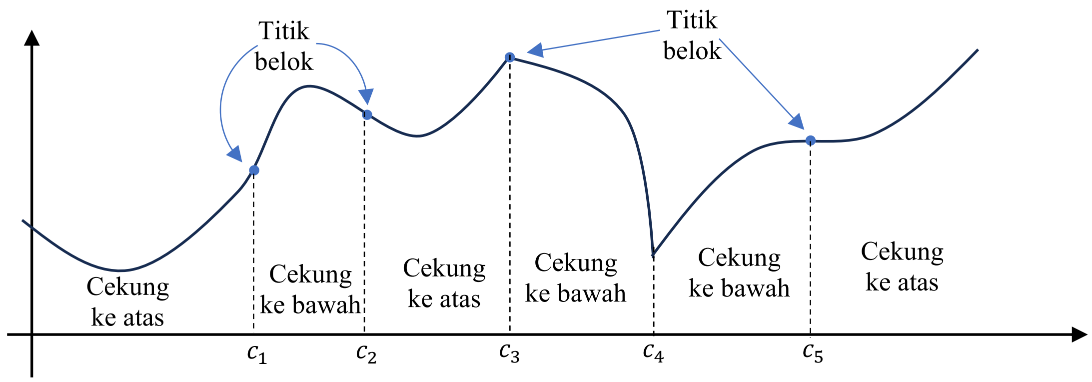
$$8x^3 - 8x < 0$$

untuk mencari interval monoton turun. Dengan menggunakan cara-cara menyelesaikan pertidaksamaan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita dapatkan hasil uji tanda seperti berikut.



Sehingga diperoleh interval kecekungan atas yaitu $(-1,0)$ dan $(1,\infty)$ dan interval kecekungan bawah yaitu $(-\infty,-1)$ dan $(0,1)$.

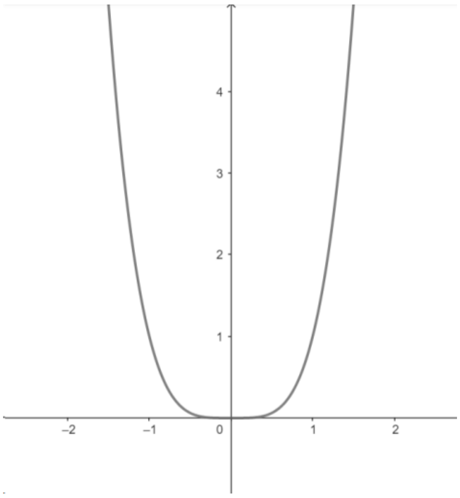
Misalkan f kontinu di c. Kita sebut $(c,f(c))$ suatu titik belok (*inflection point*) grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c. Perhatikan gambar fungsi f berikut.



Berdasarkan ilustrasi di atas, *titik-titik di mana $f''(x) = 0$ atau di mana $f''(x)$ tidak ada adalah* ***calon-calon untuk titik belok***. Gambar di atas menunjukkan bahwa di $x = c_3$ dan $x = c_4$ merupakan titik dimana $f''(x)$ tidak ada, namun $(c_3, f(c_3))$ merupalan titik belok tetapi $(c_4, f(c_4))$ bukanlah titik belok.

Apakah titik-titik di mana $f"(x) = 0$ pasti merupakan titik belok?

Tinjau $f(x) = x^4$, yang mempunyai grafik sebagai berikut.



Benar bahwa $f"(0) = 0$, tetapi titik asal bukan titik belok karena $f"(x)$ positif di kanan maupun di kiri 0.

Contoh Soal 0.1

Cari semua titik belok untuk $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5$

Jawab:

Perhatikan bahwa turunan pertama fungsi f adalah

$$f'^{(x)} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

dan turunan kedua dari f adalah

$$f''(x) = \frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}.$$

Dengan demikian $f"(0)$ tidak ada.

$f''(x)$ + + + + + - - - - - - -

0

Karena $f''(x) > 0$ untuk setiap $x < 0$ dan $f''(x) < 0$ untuk setiap $x > 0$, maka titik $\big(0, f(0)\big) = (0{,}5)$ merupakan titik belok.

Latihan Soal

Nomor 1-3, tentukan interval kemonotonan (interval dimana fungsi naik atau turun) dari fungsi-fungsi berikut di daerah asalnya.

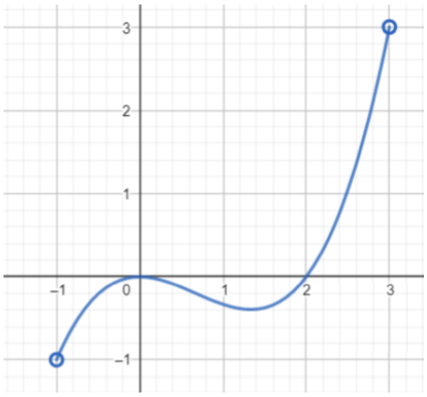
1. $f(x) = x^2(2x - 3)$
2. $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3\sqrt{x} + 1$
3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Nomor 4-6, tentukan interval dimana fungsi-fungsi berikut cekung atas atau bawah dan tentukan semua titik beloknya (jika ada).

4. $f(x) = x^3 - 12x + 1$
5. $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$
6. $g(x) = 9x^{4/3} - 2x^2 + 1$

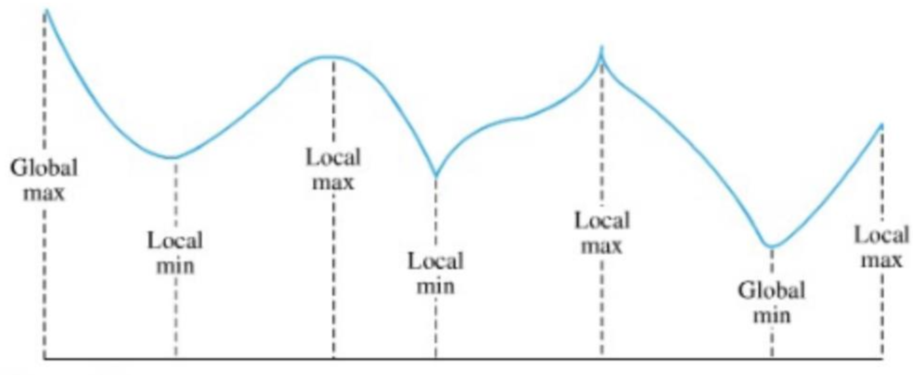
3.3 Ekstrim Lokal dan Ekstrim pada Selang Terbuka

Suatu fungsi yang terdefinisi pada interval buka belum tentu mencapai nilai maksimum atau minimum secara global. Perhatikan grafik fungsi berikut.



Berdasarkan grafik, fungsi di atas tidak memiliki nilai maksimum maupun minimum global, karena tidak punya titik batas yang merupakan 'kandidat' untuk titik ekstrim fungsi.

Namun demikian, kita masih bisa mencari titik ekstrim lokal dan nilai ekstrim lokal untuk fungsi tersebut. Secara intuitif, titik ekstrim lokal merupakan titik yang memberikan nilai maksimum atau minimum di sekitar titik tersebut saja. Agar lebih memahami perbedaan antara ekstrim lokal dan global suatu fungsi, perhatikan ilustrasi di bawah agar lebih jelas.



Definisi secara intuitif dan ilustrasi mungkin belum cukup untuk menjelaskan prinsip ekstrim lokal. Oleh karenanya, dibutuhkan definisi secara matematis sebagai berikut.

Rangkuman Materi 3.3.1

Definisi

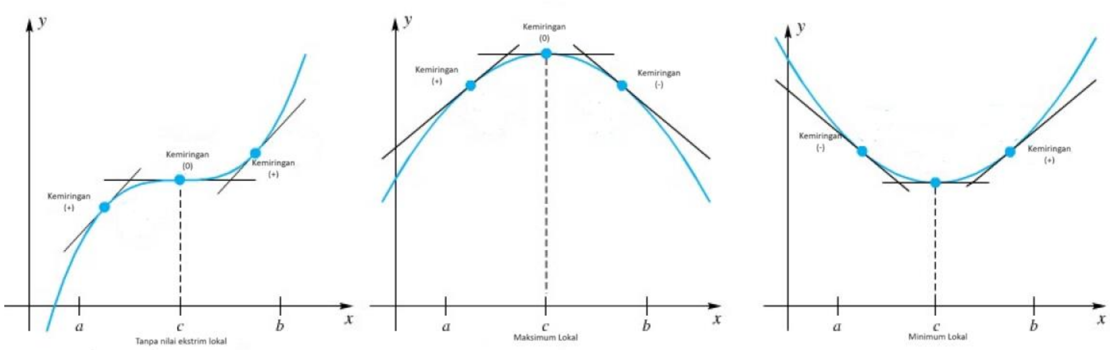
Diberikan fungsi f dengan daerah asal S dan $c \in S$.

(i) $f(c)$ disebut nilai maksimum lokal jika terdapat interval (a,b) yang memuat c sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a,b) \cap S$.

(ii) $f(c)$ disebut nilai minimum lokal jika terdapat interval $(a,b) \subset S$ yang memuat c sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a,b) \cap S$.

(iii) $f(c)$ disebut nilai ekstrim lokal jika $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

Teorema Titik Kritis (Teorema B) berlaku dengan ungkapan nilai ekstrim diganti oleh ekstrim lokal. Jadi titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) adalah ***calon*** titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrim lokal. Perhatikan gambar berikut.



Gambar sebelah kiri menunjukkan bahwa walaupun $x = c$ merupakan titik kritis tetapi c bukanlah titik ekstrim lokal. Pada gambar tengah dan kanan memperlihatkan $x = c$ merupakan titik ekstrim lokal, sebab turunan fungsinya bertanda positif pada satu pihak dari titik kritis dan negatif pada pihak lainnya.

Rangkuman Materi 3.3.2

Uji Turunan Pertama

Misalkan $x = c$ adalah titik kritis (titik stasioner atau titik singular) f pada S dan $c \in (a,b) \subset S$.

(i) Jika $f'(x) > 0$ pada (a,c) dan $f'(x) < 0$ pada (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dan $x = c$ merupakan titik maksimum lokal.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ pada (a,c) dan $f'(x) > 0$ pada (c,b) maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dan $x = c$ merupakan titik minimum lokal.

Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim lokal f.

Selain menggunakan uji turunan pertama, untuk menentukan titik stasioner apakah merupakan titik maksimum lokal atau titik minimum lokal dapat mengunakan uji turunan kedua.

Rangkuman Materi 3.3.3

Uji Turunan Kedua

Misalkan $x = c$ adalah titik stasioner f pada S dan $c \in (a, b) \subset S$ dan f punya turunan kedua pada (a, b).

(i) Jika $f''(c) > 0$ maka $f(c)$ nilai minimum lokal dan $x = c$ adalah titik minimum lokal

Jika $f''(c) < 0$ maka $f(c)$ nilai maksimum lokal dan $x = c$ adalah titik maksimum lokal

Berikut langkah-langkah yang dapat digunakan untuk menentukan titik eksrim lokal.

1. Tentukan titik stasioner dan titik singular dari f di S
2. Gunakan uji turunan pertama atau kedua untuk menentukan apakah titik stasioner atau titik singular tersebut merupakan titik maksimum lokal, minimum lokal, atau tidak keduanya
3. Hitung nilai fungsi di titik maksimum atau minimum lokal.

Contoh Soal 0.1

Tentukan titik ekstrim lokal $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum lokal kita cari terlebih dahulu titik stasioner dan titik singularnya. Titik stasioner diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f'(c) = 0$ sehingga kita peroleh persamaan berikut.

$$3c^2 - 12c = 0$$

$$c(3c - 12) = 0$$

$$c = 0 \text{ atau } c = 4$$

Kita peroleh titik stasionernya yaitu $x = 0$ dan $x = 4$. Fungsi f tidak punya titik singular karena turunan fungsi tersebut yaitu f' terdefinisi di seluruh bilangan real.

Selanjutnya kita perlu uji apakah titik tersebut merupakan titik maksimum lokal atau minimum lokal. Karena keduanya merupakan titik stasioner, maka kita bisa langsung gunakan uji turunan kedua. Turunan kedua dari f yaitu $f''(x) = 6x - 12$. Substitusikan titik $x = 0$ dan $x = 4$, maka kita peroleh

$$f''(0) = 6(0) - 12 = -12 < 0$$

$$f''(4) = 6(4) - 12 = 12 > 0$$

Berdasarkan uji turunan kedua, diperoleh bahwa $x = 0$ merupakan titik maksimum lokal dan $x = 4$ merupakan titik minimum lokal.

Terakhir, kita coba hitung nilai fungsinya.

$$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 4 = 4$$

$$f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 4 = -28$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $f(0) = 4$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(4) = -28$ merupakan nilai minimum lokal.

Latihan Soal

Untuk nomor 1-6, tentukan semua titik kritis dari f kemudian gunakan uji turunan pertama atau kedua untuk menentukan titik-titik yang memberikan nilai maksimum lokal dan minimum lokal.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
2. $g(x) = 10x^{\frac{13}{5}} - 13x^2 + 4$
3. $h(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$
4. $h(x) = \sin x \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
5. $f(t) = 8 \sin t - \tan t + 1, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
6. $g(\theta) = \sin(2\theta) - 2\cos\theta - 1, -\pi < \theta < \pi$

Untuk nomor 7-8, tentukan interval kemonotonan, interval kecekungan dan titik ekstrem lokal dari fungsi-fungsi dengan turunan berikut.

7. $f'(x) = x^3(x-1)(x-2)$
8. $g'(x) = \frac{x^2}{x-1}$

3.5 Grafik Fungsi dengan Mengunakan Kalkulus

Dalam menggambar grafik fungsi, prosedur berikut akan sangat membantu.

Langkah 1: Analisis prakalkulus.

(a) Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan.

(b) Uji kesimetrian terhadap sumbu-y dan titik asal. (Apakah fungsi genap atau ganjil).

(c) Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat (jika ada dan mudah untuk dicari)

Langkah 2: Analisis kalkulus

(a) Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan mengetahui tempat-tempat grafik monoton naik dan monoton turun.

(b) Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal.

(c) Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik belok.

(d) Cari asimtot-asimtot jika ada.

Langkah 3: Gambarkan beberapa titik (termasuk semua titik kritis dan titik belok) serta asimtot.

Langkah 4: Sketsa grafik.

Contoh Soal 3.5.1

Sketsakan grafik $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

Jawab:

Fungsi ini terdefinisi untuk setiap bilangan real kecuali 1. Fungsi ini bukan fungsi ganjil ataupun fungsi genap. Tidak terdapat perpotongan dengan sumbu-x, karena penyelesaian dari $x^2 + 3 = 0$ bukan bilangan real. Titik potongan sumbu-y adalah (0,-3). Asimtot tegaknya pada x = 1, sebab

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty\,.$$

Kurva $y = f(x)$ tidak mempunyai asimtot datar, sebab $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Perhaatikan bahwa

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} = x + 1 + \frac{4}{x-1}$$

Dapat ditunjukkan bahwa garis $y = x + 1$ berlaku $\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = 0$ dan $\lim_{x \to \infty} f(x) - y = 0$. Garis $y = x + 1$ disebut **asimtot miring** fungsi f.

Difereinsiasi dua kali memberikan

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} \quad dan \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

Oleh karena itu, titik stasioner adalah x = 3 dan x = -1. Tanda $f'(x)$ pada garis bilangan sebagai berikut.

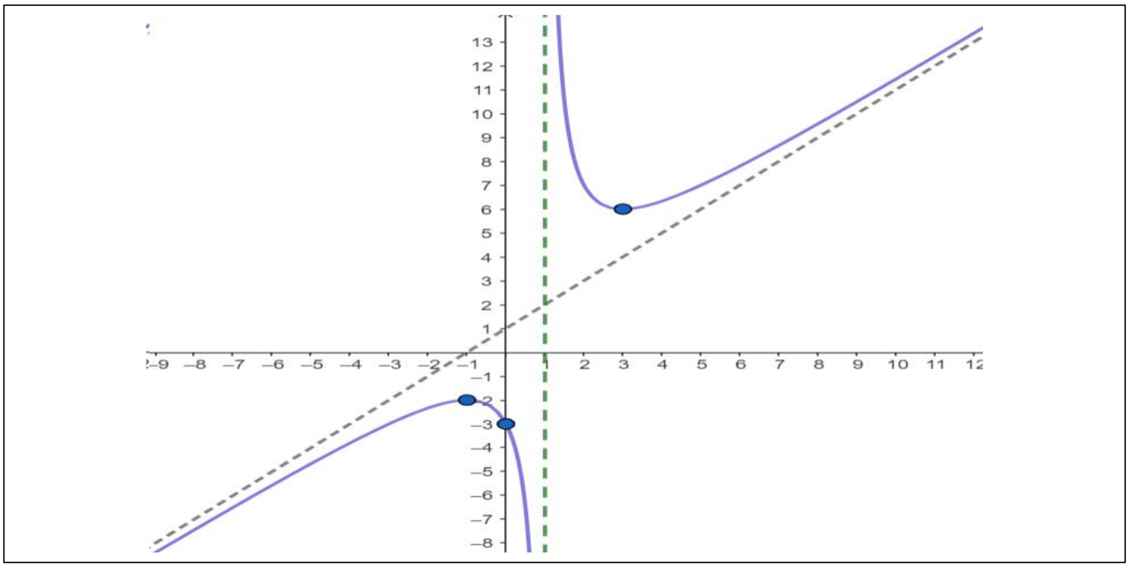
$f'(x)$ + + + + + + (-1) - - - - - - - (1) - - - - - - - (3) + + + + + +

Tanda $f''(x)$ pada garis bilangan sebagai berikut.

$f''(x)$ - - - - - - - (1) ++++++

Dengan demikian, fungsi f naik pada interval $(-\infty, -1)$ dan $(3, \infty)$ dan turun pada interval $(-1,1)$ dan $(1,3)$. Titik $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ merupakan titik maksimum lokal dan $(3, f(3)) = (3, 6)$ merupakan titik minimum lokal. Fungsi f cekung ke atas pada interval $(1, \infty)$ dan cekung ke bawah pada interval $(-\infty, 1)$.

Dengan informasi ini, kita mampu membuat sketsa grafik yang sebagai berikut.



Latihan Soal

Buatlah sketsa kurva berikut pada daerah asalnya.

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9$
2. $y = 6x^5 - 10x^3 + 2$
3. $y = 24x^{\frac{5}{3}} - 20x^{\frac{4}{3}}$
4. $y = \frac{x^2}{x-1}$
5. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$
6. $y = \frac{x}{x^2-4}$
7. $y = x\sqrt{5-x}$
8. $y = x - \sin(2x)\,, [0,2\pi]$
9. $y = 2 + \cos(2x) + 2\sin(x)\,, [0, 2\pi]$
10. Sketsa grafik suatu fungsi yang memenuhi semua informasi yang diberikan:

    (i) f kontinu $[1, 5]$ dan memiliki turunan kedua pada $(1,5)$

    (ii) $f(1) = f(5) = 3, f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2$

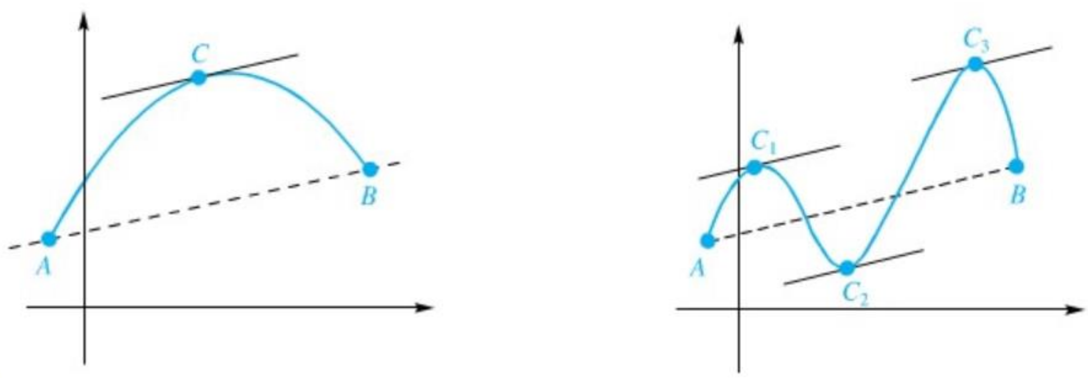
    (iii) $f'(2) = f'(4) = 0$

    (iv) $f'(x) > 0$ pada interval $(2,4)$ dan $(4,5)$; $f'(x) < 0$ pada interval $(1,2)$

    (v) $f''(x) < 0$ pada interval $(3,4)$; $f''(x) > 0$ pada interval $(1,2)$ dan $(4,5)$

3.6 Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan

Dalam geometri, Teorema Nilai Rataan mudah dipahami. Teorema ini mengatakan habwa jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung tak tegak pada setiap titik antara A dan B, maka terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik di antara A dan B sehingga garis singgung di titik C sejajar tali-busur AB. Perhatikan gambar berikut.



Rangkuman Materi 3.6.1

Teorema Nilai Rataan untuk Turunan

Jika f kontinu di interval tutup $[a, b]$ dan dapat diturunkan di titik dalam (a, b), maka terdapat bilangan c di (a, b) dengan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bentuk di atas ekuivalen dengan

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Contoh Soal 3.6.1

Tentukan apakah teorema nilai rata-rata berlaku untuk fungsi $f(x) = x^2 + x$ di interval $[-2,2]$. Jika ya, carilah nilai c yang memenuhi teorema tersebut.

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi f merupakan fungsi polinom, sehingga fungsi tersebut sudah pasti kontinu pada $[-2,2]$ dan terdiferensiasi pada $(-2,2)$. Karena f kontinu pada $[-2,2]$ dan terdiferensiasi pada $(-2,2)$, maka berlaku teorema nilai rataan untuk fungsi f. Selanjutnya kita akan coba cari c sehingga berlaku persamaan di bawah ini.

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = f'(c)$$

Perhatikan bahwa

$$f(2) = 2^2 + 2 = 6$$

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) = 2$$

$$f'(c) = 2c + 1$$

Substitusikan nilai diatas ke dalam persamaan maka kita akan peroleh

$$\frac{6-2}{2-(-2)} = 2c + 1$$

$$\frac{4}{4} = 2c + 1$$

$$1 = 2c + 1$$

$$0 = 2c$$

$$c = 0$$

Perhatikan juga bahwa $c = 0$ berada di interval $[-2,2]$, sehingga kita peroleh nilai c yang memenuhi persamaan yaitu $c = 0$.

Latihan Soal

Tentukan apakah Teorema Nilai Rata-Rata untuk turunan berlaku pada fungsi dan interval berikut. Jika ya, carilah semua nilai c yang memenuhi teorema tersebut; jika tidak sebutkan alasannya.

1. $f(x) = x^2 - x + 1, [-1,3]$
2. $h(x) = x^{\frac{2}{3}}, [-8.27]$
3. $f(x) = |x-2|, [-1,3]$
4. $f(t) = t + \sin(2t), [0,\pi]$
5. $f(x) = \begin{cases} x^3, -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$

BAB 4
INTEGRAL

4.1 Anti-Turunan

Suatu fungsi $F(x)$ disebut sebagai Anti-Turunan dari $f(x)$ di suatu interval I apabila memenuhi $F'(x) = f(x)$ di interval I. Sebagai contoh, fungsi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ merupakan Anti-Turunan dari fungsi $f(x) = x^2$ karena memenuhi

$$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) = x^2 = f(x)$$

di seluruh bilangan real.

Bagaimana dengan fungsi $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 6$ dan $H(x) = x^3$? Apakah dua fungsi tersebut merupakan Anti-Turunan dari $f(x) = x^2$? Untuk memeriksanya, cukup turunkan sekali kedua fungsi di atas lalu periksa apakah sama dengan $f(x)$ atau tidak.

Rangkuman Materi 4.1.1

Notasi Anti-Turunan

Untuk menyatakan Anti-Turunan dari suatu fungsi $f(x)$, kita biasa menggunakan notasi

$$\int f(x)\ dx$$

Yang bisa kita baca sebagai "Integral (tak tentu) dari $f(x)$".

Contoh :

$$\int 1\ dx = x + C$$

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Sifat Dasar Integral Tak Tentu

(1) $\int k\ f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$

(2) $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

(3) Untuk $r \neq 1$ berlaku :

$$\int x^r\ dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

dengan C suatu konstanta sembarang.

Contoh Soal 4.1.1

Dengan menggunakan sifat dasar Integral Tak Tentu, tentukan $\int 3x^3 + 2x^2\ dx$!

Jawab:

$$\int 3x^3 + 2x^2\ dx = \int 3x^3\, dx + \int 2x^2\, dx$$
$$= 3\int x^3\, dx + 2\int x^2\, dx$$
$$= 3\frac{x^4}{4} + C_1 + 2\frac{x^3}{3} + C_2$$
$$= \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + C$$

Catatan : jumlahan konstanta $C_1 + C_2$ dapat kita tulis sebagai C.

Rangkuman Materi 4.1.2

Integral Trigonometri

(1) $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\ dx = \sin x + C$

Contoh Soal 4.1.2

Tentukan $\int 3\sqrt{x} + \cos x\ dx$

Jawab:

$$\int 3\sqrt{x} + \cos x\ dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int \cos x\, dx$$
$$= 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_1 + \sin x + C_2$$
$$= 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \sin x + C$$
$$= 2x^{\frac{3}{2}} + \sin x + C$$

Rangkuman Materi 4.1.3

Metode Substitusi

Misalkan $F(x)$ suatu Anti-Turunan dari $f(x)$ dan $g(x)$ suatu fungsi yang dapat diturunkan, maka integral berikut

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx$$

Dapat ditentukan dengan menggunakan metode substitusi. Misalkan $u = g(x)$, maka dengan menggunakan diferensial, kita dapatkan $du = g'(x)\,dx$. Substitusikan ke integral diatas maka diperoleh

$$\begin{aligned}\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx &= \int f(u)\,du\\ &= F(u) + C\\ &= F\big(g(x)\big) + C\end{aligned}$$

Contoh Soal 4.1.3

Hitung $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$

Jawab:

Dengan menggunakan metode substitusi, misalkan $u = x^2 + 5$, maka diperoleh $du = 2x\,dx$. Bagi kedua ruas dengan 2, maka diperoleh $\frac{1}{2}\,du = x\,dx$. Substitusikan ke integral, maka kita akan peroleh

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+5}\,\,dx &= \int \sqrt{x^2+5}\cdot x\,dx\\ &= \int \sqrt{u}\,\cdot\frac{1}{2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C\\ &= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Latihan Soal

Selesaikan anti turunan berikut.

1. $\int\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{x^5}+2x\right)dx$
2. $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$
3. $\int\frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2}\,dt$
4. $\int\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
5. $\int\cos\theta\left(\tan\theta+\sec\theta\right)d\theta$

4.2 Persamaan Diferensial Sederhana

Persamaan Diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat ekspresi turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + x$$

$$\frac{d^2y}{dy^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Perhatikan bahwa solusi Persamaan Diferensial bukanlah suatu bilangan, melainkan suatu fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan di atas.

Rangkuman Materi 4.2.1

Ada banyak jenis Persamaan Diferensial namun Persamaan Diferensial yang dibahas dalam bagian ini adalah Persamaan Diferensial yang dapat dipisahkan (separable), dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)}$$

Untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial dengan bentuk diatas, kita dapat menggunakan metode pemisahan variable dengan Langkah-langkah sebagai berikut

1. Lakukan "perkalian silang " dengan memindahkan $Q(y)$ ke ruas kiri persamaan dan dx ke ruas kanan persamaan sehingga diperoleh

$$Q(y)\, dy = P(x)\, dx$$

2. Integralkan Kedua ruas dan selesaikan integral tak tentunya

$$\int Q(y)\, dy = \int P(x)\, dx$$

Contoh Soal 4.2.1

Selesaikan Persamaan Diferensial berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2}$$

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2\, dy = 2x + 1\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int y^2\, dy = \int 2x + 1\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 + C_1 = x^2 + x + C_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 = x^2 + x + C_2 - C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y^3 = 3x^2 + 3x + 3(C_2 - C_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 3(C_2 - C_1)}$$

Untuk menyederhanakan solusi, kita bisa memisalkan $C = 3(C_2 - C_1)$, sehingga didapatkan solusi Persamaan Diferensialnya yaitu

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + C}$$

Latihan Soal

Selesaikan persamaan diferensial dengan kondisi nilai awal yang diberikan.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}; y = 12 \text{ di } x = 7$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \csc y;\ \ y = \pi \ \text{ di } \ x = 0$
3. $\dfrac{dy}{dt} = t^2 y^4;\ \ y = 1 \ \text{ di } \ x = 1$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x - x^3}{3y^2};\ \ y = -1 \ \text{ di } \ x = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = x \sec y;\ \ y = \pi \ \text{ di } \ x = 0$

4.3 Notasi Sigma dan Luas Daerah

Misalkan diberikan jumlahan dari berhingga banyaknya bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Untuk menyederhanakan penulisan, kita dapat gunakan Notasi Sigma berikut

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Notasi Sigma ini memiliki arti bahwa kita menjumlahkan sekumpulan bilangan terindeks i yang dimulai dari $i = 1$ sampai $i = n$. Notasi sigma ini juga dapat kita gunakan untuk menghitung jumlahan dari kumpulan bilangan dengan "pola" tertentu yang nantinya dapat kita sebut sebagai Barisan Bilangan.

Sebagai contoh, perhatikan notasi sigma berikut.

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2(1)} + \frac{1}{2(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{2(4)} + \frac{1}{2(5)}$$

Rangkuman Materi 4.3.1

Sifat dalam Notasi Sigma

(i) $\sum_{i=1}^{n} k = nk$ untuk suatu bilangan k

(ii) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$ untuk suatu bilangan k

(iii) $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Contoh Soal 4.3.1

Misalkan diberikan $\sum_{i=1}^{50} a_i = 30$ dan $\sum_{i=1}^{50} b_i = 10$, tentukan $\sum_{i=1}^{50}(2a_i + 3b_i + 5)$

Jawab :

$$\sum_{i=1}^{50} 2a_i + 3b_i + 5 = \sum_{i=1}^{50} 2a_i + \sum_{i=1}^{50} 3b_i + \sum_{i=1}^{50} 5$$

$$= 2\sum_{i=1}^{50} a_i + 3\sum_{i=1}^{50} b_i + \sum_{i=1}^{50} 5$$

$$= 2(30) + 3(10) + 50(5)$$

$$= 60 + 30 + 250$$

$$= 340$$

Rangkuman Materi 4.3.2

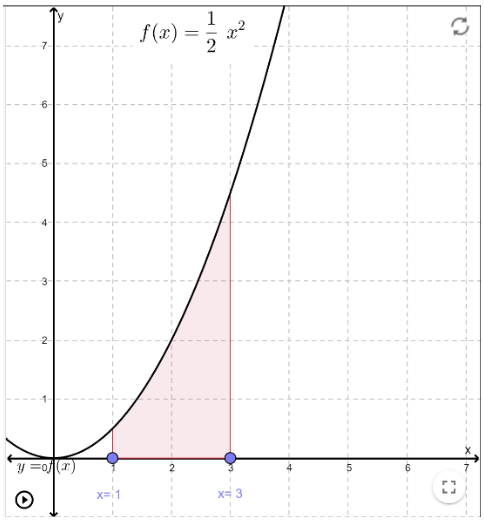
Rumus Jumlah Khusus

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Catatan : Rumus di atas biasanya berguna ketika kita akan menghitung luas daerah pada bagian selanjutnya. Rumus di atas tidak perlu diingat karena biasanya diberikan di soal ketika sekiranya dibutuhkan.

Luas Daerah

Misalkan kita punya daerah S yang dibatasi oleh $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$, garis $x = 1$, garis $x = 3$ dan sumbu x seperti pada gambar di bawah.



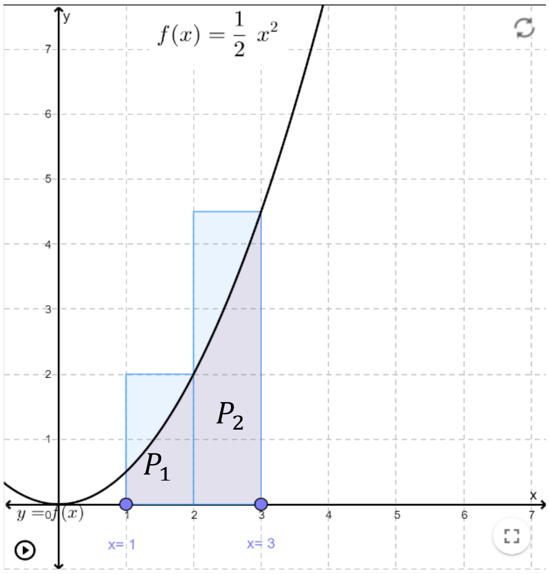
Referensi : https://www.geogebra.org/m/Fv6t696j

Untuk menghitung luas daerah S, kita akan menggunakan Langkah-langkah berikut

1. Potong-potong daerah S secara vertical menjadi beberapa bagian.
2. Perkirakan luas tiap potongan dengan menghitung luas persegi Panjang.
3. Jumlahkan luas persegi Panjang sebagai perkiraan luas untuk luas daerah S.
4. Semakin banuak potongan yang kita buat, maka semakin akurat hasil perkiraan luasnya.

Ilustrasi :

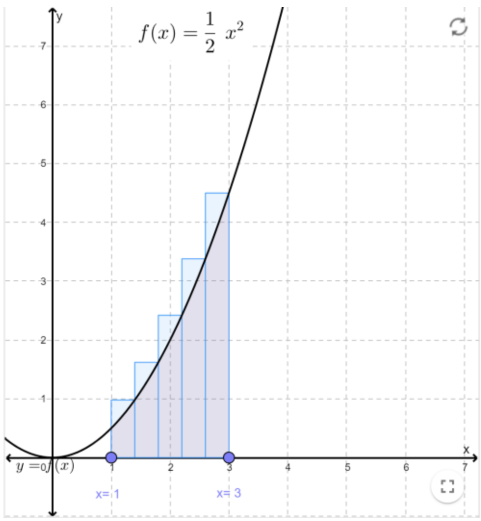
Misalkan banyak potongan yang kita buat adalah n, maka untuk $n = 2$, diperoleh ilustrasi berikut.



Berdasarkan ilustrasi diatas, maka perkiraan luas daerah S adalah $\boldsymbol{Luas\ P_1 + Luas\ P_2}$. Misalkan panjang alas persegi P_1 adalah a_1 dan tinggi persegi P_1 adalah t_1, serta panjang alas persegi P_2 adalah a_2 dan tinggi persegi P_2 adalah t_2. Perhatikan bahwa panjang alas persegi P_1 adalah 1, dan tingginya adalah $2 = f(2)$. Sementara Panjang alas persegi P_2 adalah 1 dan tingginya adalah $4{,}5 = f(3)$. Maka kita peroleh perkiraan luasnya yaitu

$$a_1t_1 + a_2t_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4{,}5 = 6{,}5$$

Sekarang misalkan kita perbanyak potongannya menjadi 5 potongan ($n = 5$), maka akan ada 5 buah persegi Panjang seperti berikut.



Sekarang kita notasikan persegi panjang dari kiri ke kanan sebagai P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Untuk setiap persegi Panjang ke i (P_i) untuk $i = 1,2..,5$, P_i memiliki panjang alas yang sama yang kita notasikan sebagai $\Delta x = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$ dan tinggi dari P_i adalah nilai fungsi $f(x)$ di titik $x_i = 1 + \Delta x \cdot i = 1 + 0{,}4i$, sehingga kita dapatkan luas masing-masing persegi Panjang yang disajikan dalam tabel berikut.

i	$a_i = \Delta x$	t_i	$Luas\ P_i = a_i \cdot t_i$
1	0,4	$f(1{,}4) = 0{,}98$	0,392
2	0,4	$f(1{,}8) = 1{,}62$	0,648
3	0,4	$f(2{,}2) = 2{,}42$	0,968
4	0,4	$f(2{,}6) = 3{,}38$	1,352
5	0,4	$f(3) = 4{,}5$	1,8
Jumlah			5,16

Berdasarkan perhitungan diatas, kita dapatkan perkiraan luasnya sebesar 5,16. Perhatikan bahwa perhitungan diatas dapat dinyatakan dalam jumlahan berikut

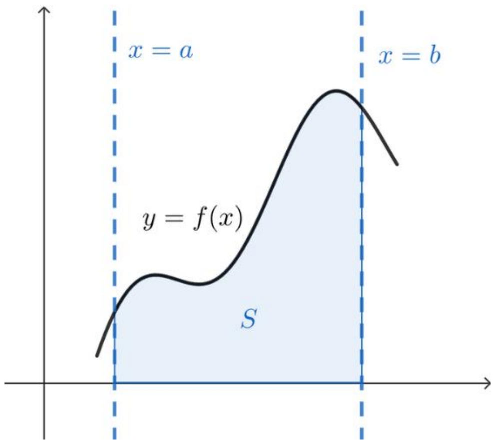
$$\begin{aligned} Luas &\approx Luas\ P_1 + Luas\ P_2 + \cdots + Luas\ P_5 \\ &= a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2 + \cdots + a_5 \cdot t_5 \\ &= \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \cdots + \Delta x \cdot f(x_5) \\ &= f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_5) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Notasi Sigma, kita bisa menuliskan persamaan diatas menjadi lebih sederhana yatu

$$Luas \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Perumuman

Misalkan kita punya daerah S yang dibatasi oleh $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu x seperti pada ilustrasi berikut.



Kita ingin menghitung luas daerah S dengan membagi daerah S menjadi n buah potongan dan memperkirakan luasnya dengan menghitung jumlah luas n buah persegi Panjang seperti pada ilustrasi dan contoh sebelumnya. Perkiraan luasnya dinyatakan dengan ekspresi berikut

$$Luas \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

dengan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ dan $x_i = a + \Delta x \cdot i$. Ekspresi sigma di atas disebut jumlah Riemann kanan.

4.4 Integral Tentu

Rangkuman Materi 4.4.1

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi di interval tutup [a, b].

Integral tentu dari f pada interval [a, b] dapat didefinisikan dengan dua cara

- sebagai limit dari jumlah Riemann Kanan, yakni

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

- atau sebagai limit dari jumlah Riemann Kiri, yakni:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

Contoh Soal 4.4.1

Hitunglah integral $\int_1^3 (3x^2+1)\,dx$ menggunakan definisi (limit dari jumlah Riemann kanan atau kiri)

Jawab:

Perhatikan bahwa,

$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$,

$x_i = 1 + \Delta x \cdot i$

$= 1 + \frac{3-1}{n} i$

$= 1 + \frac{2}{n} i$

Jumlah Riemann kanan

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2}{n}i\right)\cdot\frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{2}{n}i\right)^2+1\right] \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{4}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2\right)+1\right] \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3+\frac{12}{n}i+\frac{12}{n^2}i^2+1\right] \\
&= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}4+\sum_{i=1}^{n}\frac{12}{n}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{12}{n^2}i^2\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n+\frac{12}{n}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+\frac{12}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n+6(n+1)+2\left(\frac{2n^2+3n+1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n+6n+6+4n+6+\frac{2}{n}\right) \\
&= 28+\frac{24}{n}+\frac{4}{n^2}
\end{aligned}
$$

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \left(3x^2+1\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(28+\frac{24}{n}+\frac{4}{n^2}\right) \\
&= 28
\end{aligned}
$$

Jumlah Riemann kiri

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2}{n}(i-1)\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{2}{n}(i-1)\right)^2+1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{4}{n}(i-1)+\frac{4}{n^2}(i-1)^2\right)+1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{4}{n}(i-1)+\frac{4}{n^2}\left(i^2-2i+1\right)\right)+1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{4}{n}i-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}i^2-\frac{8}{n^2}i+\frac{4}{n^2}\right)+1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3+\frac{12}{n}i-\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}i^2-\frac{24}{n^2}i+\frac{12}{n^2}+1\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12}{n}i-\frac{24}{n^2}i\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{12}{n^2}i^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(4-\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}\right)+\left(\frac{12}{n}-\frac{24}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}i+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(\left(4-\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}\right)\cdot n+\left(\frac{12}{n}-\frac{24}{n^2}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+\frac{12}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(4n-12+\frac{12}{n}+6n+6-12-12n+2\left(\frac{2n^2+3n+1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(4n-12+\frac{12}{n}+6n+6-12-\frac{12}{n}+4n+6+\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(14n-12+\frac{2}{n}\right)$$

$$= 28-\frac{24}{n}+\frac{4}{n^2}$$

Sehingga,

$$\int_1^3\left(3x^2+1\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(28-\frac{24}{n}+\frac{4}{n^2}\right)$$

$$= 28$$

Contoh Soal 4.4.2

Nyatakanlah limit dari jumlah Riemann $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2}{n}i\right)^2\frac{2}{n}$ sebagai integral tentu.

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

Pilih $\Delta x = \frac{2}{n}$. Jika $a = 0$ dan $b = 2$, maka $x_i = 0 + \frac{2}{n}i = \frac{2}{n}i$ dan $f(x_i) = (1 + x_i)^2$.

Diperoleh $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2}{n}i\right)^2\frac{2}{n} = \int_0^2 (1+x)^2\,dx$.

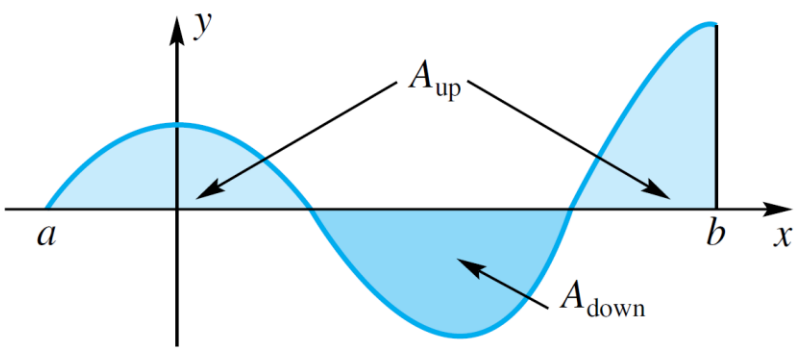
Bentuk integral tentu dari limit di atas tidaklah tunggal. Apabila dipilih $a = 1$ dan $b = 3$, maka $x_i = 1 + \frac{2}{n}i = 1 + \frac{2}{n}i$ dan $f(x_i) = x_i^2$. Sehingga bentuk integral tentunya adalah

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2}{n}i\right)^2\frac{2}{n} = \int_1^3 x^2\,dx$.

Integral sebagai Luas Daerah

Jika $f(x) > 0$ pada interval $[a, b]$, maka $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah yang dibatasi grafik f, garis $x = a, x = b$, dan sumbu-x.

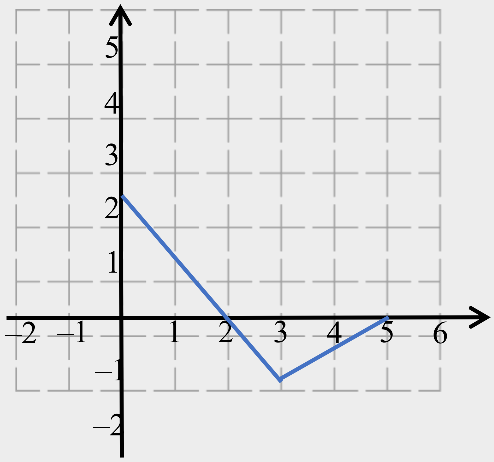
Jika $f(x)$ bervariasi, kadang positif, kadang negatif pada interval $[a, b]$ seperti pada di gambar berikut,



maka $\int_a^b f(x)dx = A_{up} - A_{down}$, dengan A_{up} adalah jumlah luas daerah di atas sumbu-x dan A_{down} adalah jumlah luas daerah di bawah sumbu-x.

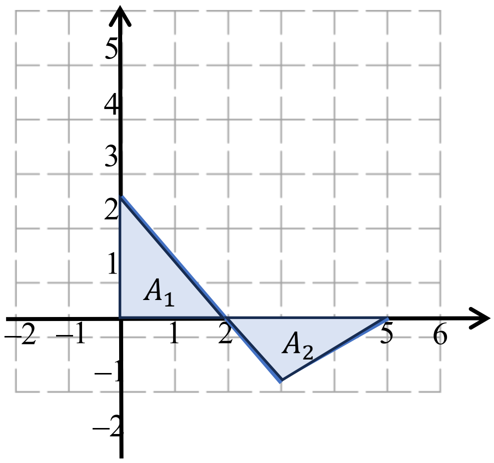
Contoh Soal 4.4.3

Diberikan grafik fungsi f sebagai berikut



Tentukan nilai $\int_0^5 f(x)dx$.

Jawab:



Nilai $\int_0^5 f(x)dx$ sama dengan nilai luas A_1 – luas A_2, sehingga

$$\int_0^5 f(x)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}\times 2\times 2 - \frac{1}{2}\times 3\times 1 = \frac{1}{2}.$$

Rangkuman Materi 4.4.2

Sifat-sifat Integral Tentu

1. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

5. Jika $f(x) \le g(x)$, maka $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

7. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Contoh Soal 4.4.4

Misalkan f dan g dua fungsi yang kontinu pada [0, 4] dan diketahui

$$\int_0^1 f(x)dx = -1, \int_1^4 f(x)dx = 6$$

$$\int_0^4 g(x)dx = 3, \int_1^4 g(x)dx = -2$$

Tentukan:

a. $\int_0^1 g(x)dx$

b. $\int_0^1 (2f(x) - 5g(x))dx$

Jawab:

a. $\int_0^4 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^4 g(x)dx$

$$3 = \int_0^1 g(x)dx + (-2)$$

$$\int_0^1 g(x)dx = 5$$

b. $\int_0^1 \left(2f(x) - 5g(x)\right)dx = \int_0^1 2f(x)dx + \int_0^1 -5g(x)dx$

$$= 2\int_0^1 f(x)dx - 5\int_0^1 g(x)dx$$

$$= 2(-1) - 5(5) = -27$$

Latihan Soal

1. Dengan menggunakan limit jumlah Riemann kiri atau kanan, hitunglah

   (a) $\int_0^1 4dx$

   (b) $\int_{-2}^4 (4x-1)dx$

   (c) $\int_0^2 4x^3 dx$

2. Hitung $\int_{-1}^2 f(x)dx$ untuk fungsi-fungsi berikut dengan terlebih dahulu membuat sketsa grafik fungsi f.

   (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2 + \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right]$

   (d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

3. Kenali limit berikut sebagai integral tentu.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n}\right]$

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}+\left(\frac{2i}{n}\right)^{2}\right)\frac{2}{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{n+i}}\cdot\frac{1}{n}$

4.5 Teorema Dasar Kalkulus 2

Pada bagian sebelumnya, kita telah mempelajari bagaimana caranya menghitung Integral Tentu yaitu menggunakan Limit Jumlah Riemann dan menginterpretasikan integral sebagai luas daerah yang bertanda. Namun demikian, kedua metode tersebut kurang praktis, atau bahkan tidak bisa diterapkan untuk kasus-kasus tertentu. Sebagai contoh, misalkan kita ingin menghitung Integral Tentu berikut

$$\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx$$

Perhatikan bahwa untuk menghitung integral tersebut menggunakan Limit Jumlah Riemann, kita perlu menghitung jumlahan dibawah ini

$$\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{i} = 1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}$$

Tentunya kita akan kesulitan untuk menghitung jumlahan tersebut karena tidak ada formula khusus (yang bergantung terhadap n) untuk menghitungnya. Oleh karena itu, kita perlu metode lain untuk menghitung Integral Tentu tersebut. Metode yang akan kita gunakan berkaitan dengan Teorema Dasar Kalkulus 2 (TDK 2).

Rangkuman Materi 4.5.1

Teorema Dasar Kalkulus 2

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu di $[a, b]$ dan F suatu Anti-Turunan dari f di (a, b) maka berlaku

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Catatan : Ekspresi $F(b) - F(a)$ dapat kita notasikan dalam bentuk $[F(x)]_a^b$

Sekarang kita akan coba gunakan TDK 2 untuk menyelesaikan permasalahan awal kita. Perhatikan bahwa Anti-Turunan dari $f(x) = x\sqrt{x}$ adalah

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\sqrt{x}\,dx \\ &= \int x^{3/2}\,dx \\ &= \frac{x^{5/2}}{5/2} \\ &= \frac{2}{5}x^{5/2} \end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh Integral Tentunya yaitu

$$\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{5}4^{5/2} - \frac{2}{5}0^{5/2}$$

$$= \frac{64}{5}$$

Metode Substitusi untuk Integral Tentu

Pada bagian sebelumnya, kita dapat menggunakan metode substitusi untuk mencari Anti-Turunan dari suatu fungsi tertentu. Metode ini juga dapat kita terapkan untuk menghitung nilai Integral Tentu. Namun demikian, kita harus ingat bahwa Ketika kita melakukan substitusi variable, maka batas Integral juga harus berubah.

Contoh Soal 4.5.1

Hitung integral tentu $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$.

Jawab:

Untuk menggunakan TDK 2, kita harus mencari anti-turunan dari $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Untuk mencari anti-turunannya, kita gunakan metode substitusi dengan memisalkan $u = 3x + 1$ sehingga diperoleh $\frac{du}{dx} = 3 \iff dx = \frac{1}{3}du$. Selanjutnya, jangan lupa untuk melakukan perubahan batas integral.

- Batas Bawah : Ketika $x = 5$ maka $u = 3(5) + 1 = 16$
- Batas Bawah : Ketika $x = 8$ maka $u = 3(8) + 1 = 25$

Dengan melakukan substitusi dan perubahan batas, kita dapatkan Integral tentu yang baru yaitu

$$\int_{16}^{25} \sqrt{u}\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int_{16}^{25} u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{16}^{25}$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{2}{3}25^{3/2} - \frac{2}{3}16^{3/2})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(125) - \frac{2}{3}(64)\right)$$

$$= \frac{2}{9}(125 - 64) = \frac{122}{9}$$

Latihan Soal

1. Gunakan Teorema Dasar Kalkulus Kedua untuk menghitung masing-masing integral tentu.

   (a) $\int_0^2 (1-6x^2)dx$

   (b) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin x dx$

   (c) $\int_1^4 \left(\frac{x^5-2}{x^{3/2}}\right)dx$

   (d) $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x+1)dx$

2. Gunakan metode subtitusi untuk menentukan integral tentu berikut.

   (a) $\int_0^3 (3x+1)^6\, dx$

   (b) $\int_1^3 \frac{2x+1}{(x^2+x)^4}dx$

   (c) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$

   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4\theta)\,d\theta$

   (e) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$

   (f) $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} t\sec^2(t^2)dt$

4.6 Teorema Dasar Kalkulus 1

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu pada interval I dan $a \in I$. Definisikan suatu fungsi baru yang nantinya disebut sebagai Fungsi Akumulasi dari f yang dituliskan dalam Integral berikut.

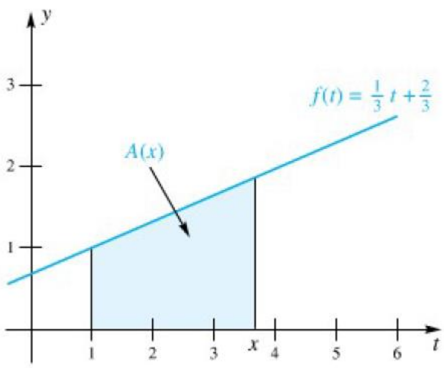
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

untuk suatu x di I.

Sebagai contoh, Misalkan kita punya suatu fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ yang terdefinisi di bilangan Real. Definisikan suatu fungsi akumulasi dari f yaitu A sebagai berikut

$$A(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) dt$$

Secara geometris fungsi akumulasi di atas menunjukkan Luas Daerah seperti pada gambar berikut.



Dengan menggunakan Luas Trapesium, kita dapatkan rumus eksplisit untuk $A(x)$

$$\text{Luas Trapesium} = \frac{1}{2} \cdot (\text{jumlah sisi sejajar}) \cdot \text{tinggi}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A(x) &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)\right) \cdot (x-1) \\ &= \frac{1}{2}(x-1)\left(\frac{5}{3} + \frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5x}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{5}{3} - \frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Jika kita turunkan $A(x)$, kita akan mendapatkan

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Dengan kata lain

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) dt = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Perhatikan bahwa fungsi akumulasi dari fungsi f, ketika diturunkan akan menghasilkan fungsi f lagi. Sebenarnya sifat ini dapat kita perumum untuk seluruh fungsi yang kontinu di suatu interval tertutup. Perumuman inilah yang nantinya kita sebut sebagai Teorema Dasar Kalkulus 1 (TDK 1).

Rangkuman Materi 4.6.1

Teorema Dasar Kalkulus 1

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu pada interval tertutup I dan $a \in I$, maka berlaku

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Teorema ini disebut Teorema Dasar Kalkulus 1 (pertama) karena menghubungkan dua hal penting dalam kalkulus yaitu Turunan dan Integral.

Variasi Fungsi Akumulasi

Misalkan $p(x)$ suatu fungsi sembarang dan kita ingin menurunkan Fungsi Akumulasi berikut

$$W(x) = \int_a^{p(x)} f(t)dt$$

maka kita dapat menggunakan aturan rantai. Tuliskan $u = p(x)$, maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx} &= \frac{dW}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\int_a^u f(t)dt \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f(u)\cdot\frac{d}{dx}p(x) \\ &= f(p(x))\cdot p'(x)\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\frac{d}{dx}\int_a^{p(x)} f(t)dt = f\big(p(t)\big)\cdot p'(x)$$

Contoh Soal 4.6.1

Diberikan fungsi akumulasi berikut

$$A(x) = \int_{2}^{3x+2} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$$

Tentukan $A'(x)$

Jawab:

Untuk menentukan turunan fungsinya yaitu $A'(x)$, kita tulis $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ dan $u = 3x + 2$, maka dengan menggunakan sifat diatas kita bisa peroleh

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{2}^{3x+2} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt &= \frac{d}{du}\int_{2}^{u} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{u^2}{u^2+1}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{(3x+2)^2}{(3x+2)^2+1}\cdot\frac{d}{dx}(3x+2) \\ &= \frac{3(3x+2)^2}{(3x+2)^2+1}\end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Misalkan $f(x) = \begin{cases} 2, & 2 \le x \le 5 \\ 7-x, & 5 < x \le 9 \end{cases}$ dan $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ untuk $x \in [2,7]$. Sketsa grafik fungsi f dan tentukan suatu formula untuk $A(x)$. Periksalah apakah berlaku bahwa $A'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (2,9)$.
2. Tentukan turunan fungsi dalam variabel x berikut.

   (a) $\int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}dt$

   (b) $\int_x^5 \sqrt{t^4+1}dt$

   (c) $\int_1^{x^2+2} \frac{2s}{3+\sin s}ds$

   (d) $\int_{-x}^{3x-1} \cos\left(\theta^2\right)d\theta$
3. Tentukan fungsi kontinu f (jika ada) yang memenuhi

(a) $\int_{1}^{x} f(t)dt = x^2 + 3x - 1$

(b) $\int_{x}^{2} f(t)dt = x^3 + \cos x$

(c) $\int_{0}^{2x} f(t)dt = 4x + \sin(8x)$

4.7 Teorema Nilai Rataan Untuk Integral dan Sifat Simetri

Rangkuman Materi 4.7.1

Definisi Rata-rata sebuah Fungsi.

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu di interval $[a, b]$, maka nilai rataan f pada interval $[a, b]$ adalah

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema Nilai Rataan untuk integral menjamin bahwa terdapat bilangan c di antara a dan b sehingga $f(c)$ sama dengan nilai rataannya.

Rangkuman Materi 4.7.2

Teorema Nilai Rataan untuk Integral.

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu di interval $[a, b]$, maka maka terdapat c antara a dan b sedemikan hingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh Soal 4.7.1

Tentukan semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rataan untuk integral untuk fungsi $f(x) = x^2 - x$ di interval $[0,2]$.

Jawab:

Nilai rataan fungsi di atas adalah

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2 - x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - \frac{1}{2}0^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{8}{3} - 2\right) - (0-0)\right) = \frac{1}{3}$$

Selanjutnya cari nilai c dengan menyelesaikan persamaan

$$f(c) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - c = \frac{1}{3}$$

Eksistensi nilai c dijamin oleh teorema nilai antara. Penyelesaian persamaan kuadrat diatas diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. 😊

Rangkuman Materi 4.7.3

Sifat Simetri

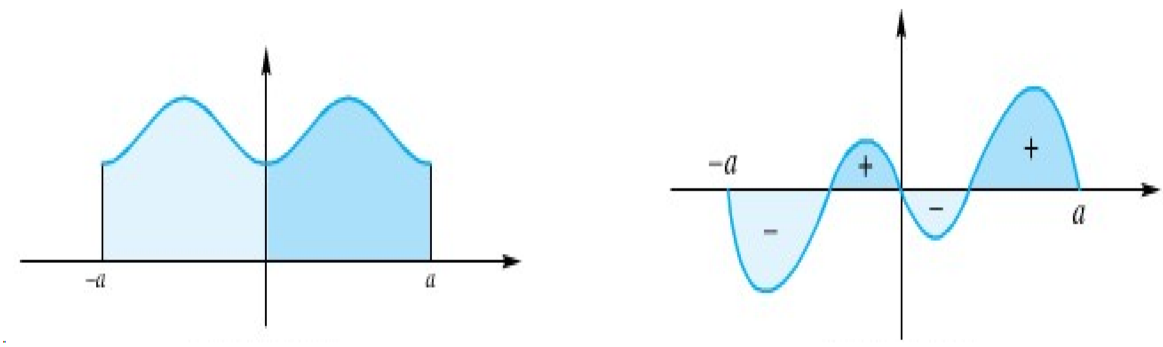
Misalkan f suatu fungsi genap yang memenuhi $f(-x) = f(x)$, maka berlaku

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

Misalkan f suatu fungsi ganjil yang memenuhi $f(-x) = -f(x)$, maka berlaku

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Ilustrasi :



Contoh Soal 4.7.2

Hitung Integral $\int_{-3}^{3} 2x\cos 4x - 3x^4 dx$

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = 2x\cos 4x$ merupakan fungsi ganjil dan $g(x) = 3x^4$ merupakan fungsi genap sehingga integral di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$\int_{-1}^{1} 2x\cos 4x - 3x^4 dx = \int_{-1}^{1} 2x\cos 4x\, dx - \int_{-1}^{1} 3x^4\, dx$$

$$= 0 - 2\int_{0}^{1} 3x^4\, dx$$

$$= -2\left[\frac{3x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= -2\left(\frac{3(1)^5}{5} - \frac{3(0)^5}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

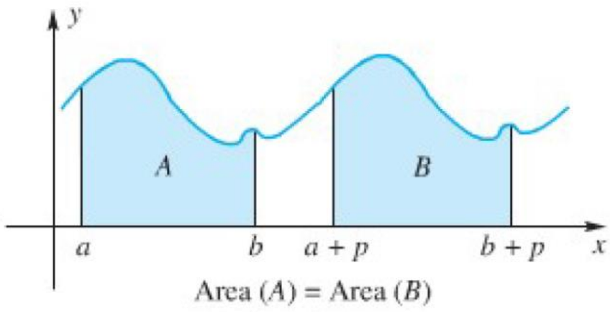
Rangkuman Materi 4.7.4

Sifat Keperiodikan

Misalkan f merupakan suatu fungsi periodik dengan periode p yang memenuhi $f(x+p) = f(x)$, maka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Ilustrasi sifat keperiodikan dapat dilihat dengan ilustrasi berikut



Perhatikan bahwa sifat keperiodikan membuat Luas A = Luas B.

Contoh Soal 4.7.3

Diberikan suatu fungsi f yang kontinu di Bilangan Real dan periodik dengan periode 10. Diketahui pula bahwa $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 20$. Hitunglah $\int_{0}^{20} f(x)\,dx$.

Jawab:

Dengan menggunakan sifat keperiodikan dengan periode 10, kita dapatkan persamaan berikut

$$\int_{-5}^{0} f(x)\,dx = \int_{-5+10}^{0+10} f(x)\,dx = \int_{5}^{10} f(x)\,dx$$

Dengan menggunakan persamaan diatas, kita peroleh

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

$$20 = \int_{5}^{10} f(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

$$20 = \int_{0}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{10} f(x)\,dx$$

$$20 = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

Berdasarkan sifat keperiodikan pula, kita dapatkan

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_{0+10}^{10+10} f(x)\,dx = \int_{10}^{20} f(x)\,dx$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \int_0^{20} f(x)\,dx &= \int_0^{10} f(x)\,dx + \int_{10}^{20} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{10} f(x)\,dx + \int_0^{10} f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^{10} f(x)\,dx \\ &= 2(20) \\ &= 40 \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika f fungsi satu-satu, maka f mempunyai invers fungsi(dinotasikan dengan f^{-1}). Lambang f^{-1} bukan berarti $\frac{1}{f}$. Untuk menunjukkan suatu fungsi mempunyai invers dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi satu-satu atau bisa juga menunjukkan bahwa fungsi tersebut monoton murni sebagaimana teorema berikut.

Rangkuman Materi 4.7.5

Jika f monoton murni pada daerah asalnya, maka f memiliki invers.

Teorema selanjutnya memberikan hubungan antara turunan fungsi f dengan f^{-1}.

Rangkuman Materi 4.7.6

Misalkan f terdiferensiasikan dan monoton murni pada interval I. Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu x tertentu dalam I, maka f^{-1} dapat didiferensiasikan di titik yang berpadanan $y = f(x)$ dalam daerah hasil f dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

seringkali dituliskan dalam lambang sebagai

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Contoh Soal 4.7.4

Perlihatkan bahwa $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$ memiliki invers kemudian carilah $(f^{-1})'(4)$.

Jawab:

Perhatikan bahwa $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ untuk setiap bilangan real x. Jadi, f monoton naik. Akibatnya, f mempunyai invers. Selanjutnya, $y = 4$ berpadanan dengan $x = 1$, dan karena $f'(x) = 5x^4 + 2$, maka

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}.$$

Latihan Soal

1. Carilah rata-rata nilai fungsi pada interval yang diberikan.
   (a) $f(x) = 3x^2;\quad [1,3]$
   (b) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}};\quad [0,4]$
   (c) $f(x) = x + |x|;\quad [-1,2]$
2. Tentukan semua nilai c yang memenuhi Teorema Rata-rata untuk Integral pada interval yang diberikan.
   (a) $f(x) = |x|;\quad [0,4]$
   (b) $f(x) = 1 - x; [-4,3]$
   (c) $g(x) = x(1-x);\quad [0,1]$
   (d) $h(x) = \cos(2x);\ [0,\pi]$
3. Gunakan kesimetrian fungsi untuk mempermudah perhitungan integral berikut.
   (a) $\int_{-1}^{1} (x + x^4 + x^{5/3})dx$
   (b) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} |x| \tan x dx$

(c) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^4}+2\right)dx$

(d) $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\sqrt{4-x^2}\,dx$

4. Tentukan rata-rata fungsi $f(x) = 21x^2 + \sin^5(4x+2)$ pada interval [–4, 3]. (*Petunjuk: gunakan metode subtitusi* $u = 4x + 2$)
5. Gunakan keperiodikan fungsi untuk menghitung integral berikut.

(a) $\int_{0}^{4\pi}|\cos x|dx$

(b) $\int_{0}^{50\pi}|\sin 2x|dx$

(c) $\int_{1}^{1+\pi}|\sin x|dx$, (Petunjuk: tulis sebagai $\int_{1}^{1+\pi}|\sin x|dx = \int_{1}^{\pi}|\sin x|dx + \int_{\pi}^{1+\pi}|\sin x|dx$.

(d) $\int_{2}^{2+100\pi}|\cos x|dx$

4.8 Integrasi Numerik

Kita tahu bahwa Ketika fungsi f kontinu di interval $[a, b]$, maka Integral Tentu $\int_a^b f(x)dx$ dapat kita tentukan nilainya. Pada bagian sebelumnya kita telah belajar bagaimana menggunakan Teorema Dasar Kalkulus 2 untuk menyelesaikan Integral Tentu menggunakan Anti-Turunannya. Namun demikian, ada beberapa fungsi yang mungkin sulit untuk kita cari Anti-Turunannya, ceperti contohnya

$$f(x) = \sqrt{1 + x^5} \;\; ; \int \sqrt{1 + x^5}\, dx = ?$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \;\; ; \int \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

Maka dari itu, untuk menaksir nilai Integral Tentu yang sulit dicari Anti-Turunannya, kita dapat gunakan Metode Integrasi Numerik. Untuk menghitung Integral Tentu

$$\int_a^b f(x)dx$$

dengan "memotong" interval pengintegralan menjadi n bagian sama panjang, ada 5 metode yang yang dapat digunakan yaitu

Rangkuman Materi 4.8.1

1. Jumlah Riemann Kanan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

dengan $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$

2. Jumlah Riemann Kiri

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

dengan $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i.$

3. Jumlah Riemann Tengah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right)$$

dengan $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$.

4. Aturan Trapesium

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2})$$
$$+ 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

dengan $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$.

5. Aturan Parabolik (Simpson)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$
$$+ 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

dengan $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$ dan n genap.

Contoh Soal 4.8.1

Aproksimasikan integral tentu $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$ dengan mengggunakan kelima metode di atas.

Jawab:

Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$. Kita punya $a = 1$, $b = 4$, dan $n = 6$, sehingga $\frac{b-a}{n} = 0{,}5$. Nilai-nilai x_i dan $f(x_i)$ adalah

$$x_0 = 1{,}0 \qquad f(x_0) = f(1{,}0) = \frac{1}{1} = 1{,}0000$$

$$x_1 = 1{,}5 \qquad f(x_0) = f(1{,}5) = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}6667$$

$$x_2 = 2{,}0 \qquad f(x_0) = f(2{,}0) = \frac{1}{2} = 0{,}5000$$

$$x_3 = 2{,}5 \qquad f(x_0) = f(2{,}5) = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4000$$

$$x_4 = 3{,}0 \qquad f(x_0) = f(3{,}0) = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333$$

$$x_5 = 3{,}5 \qquad f(x_0) = f(3{,}5) = \frac{1}{3{,}5} \approx 0{,}2857$$

$$x_6 = 4{,}0 \qquad f(x_0) = f(4{,}0) = \frac{1}{4} = 0{,}2500$$

- Metode Riemann Kanan

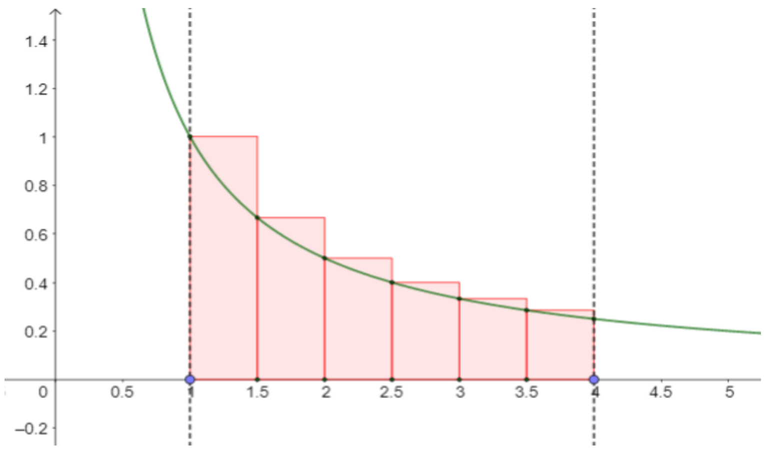
$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)\right]$$

$$= 0,5\left[f(1,5)+f(2,0)+f(2,5)+f(3,0)+f(3,5)+f(4,0)\right]$$

$$\approx 0,5[0,6667+0,5000+0,4000+0,3333+0,2857+0,2500]$$

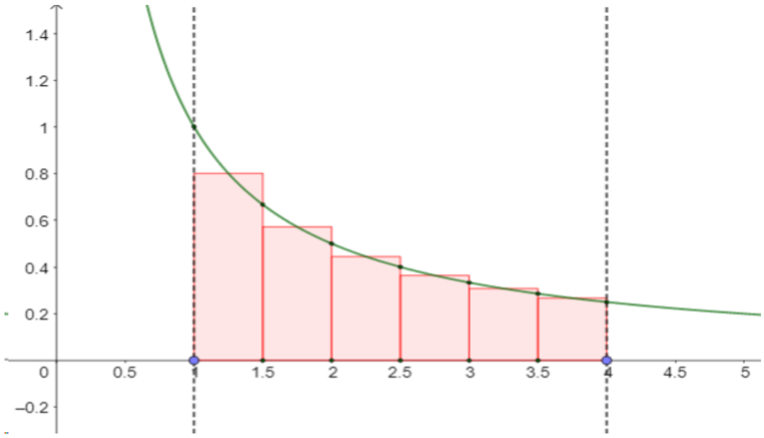
$$= 1,21785$$

- Metode Riemann Kiri



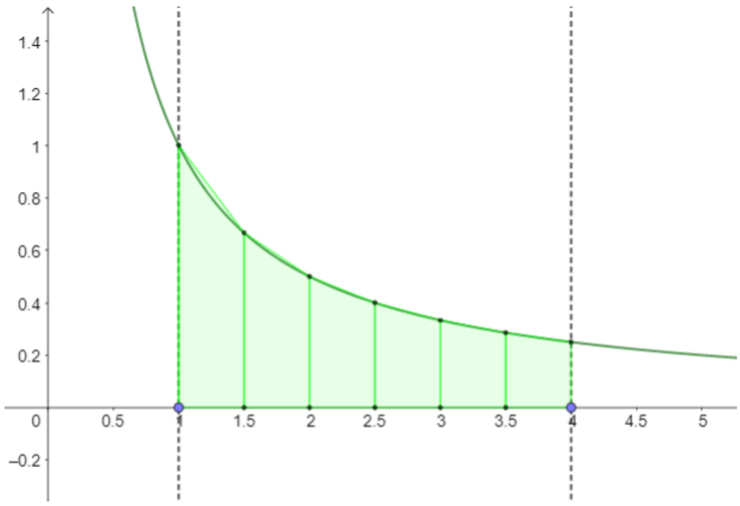
$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right]$$
$$= 0,5\left[f(1,0)+f(1,5)+f(2,0)+f(2,5)+f(3,0)+f(3,5)\right]$$
$$\approx 0,5[1,0000+0,6667+0,5000+0,4000+0,3333+0,2857]$$
$$=1,59285$$

- Metode Reimann Tengah



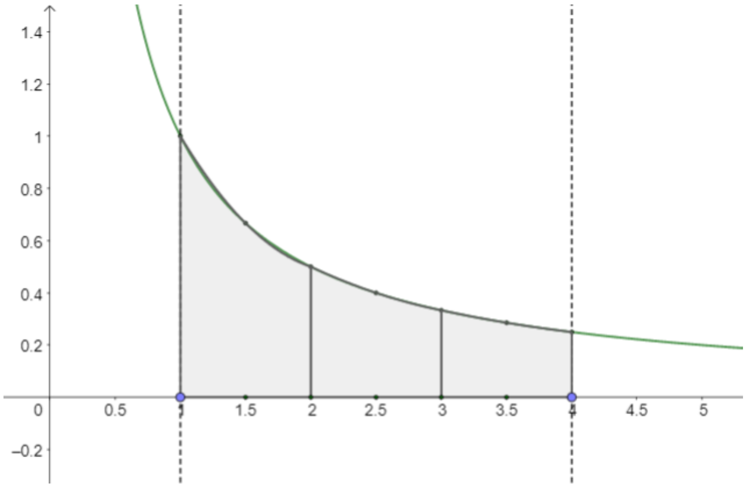
$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)+f\left(\frac{x_4+x_5}{2}\right)+f\left(\frac{x_5+x_6}{2}\right)\right]$$
$$= 0,5\left[f(1,25)+f(1,75)+f(2,25)+f(2,75)+f(3,25)+f(3,75)\right]$$
$$\approx 0,5[0,8000+0,5714+0,4444+0,3636+0,3077+0,2667]$$
$$=1,37675$$

- Metode Trapesium



$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\right]$$
$$= 0,25\left[f(1,0)+2f(1,5)+2f(2,0)+2f(2,5)+2f(3,0)+2f(3,5)+f(4,0)\right]$$
$$\approx 0,25[1,0000+2\times 0,6667+2\times 0,5000+2\times 0,4000+2\times 0,3333+2\times 0,2857+0,2500]$$
$$=1,40535$$

- Metode Parabolik



$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\right]$$

$$\approx 0{,}1667\left[f(1{,}0)+4f(1{,}5)+2f(2{,}0)+4f(2{,}5)+2f(3{,}0)+4f(3{,}5)+f(4{,}0)\right]$$

$$\approx 0{,}1667[1{,}0000+4\times 0{,}6667+2\times 0{,}5000+4\times 0{,}4000+2\times 0{,}3333+4\times 0{,}2857+0{,}2500]$$

$$\approx 1{,}380$$

Rangkuman Materi 4.8.2

Galat

Dengan asumsi bahwa turunan-turunan yang diperlukan ada pada interval $[a,b]$, galat-galat untuk jumlah Riemann kiri, jumlah Riemann kanan, jumlah Riemann titik tengah, Metode Trapesium, dan Metode Parabolik adalah

Jumlah Riemann Kiri: $E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ untuk suatu c dalam $[a,b]$

Jumlah Riemann Kanan: $E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ untuk suatu c dalam $[a,b]$

Jumlah Riemann Titik Tengah: $E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$ untuk suatu c dalam $[a,b]$

Aturan Trapesium: $E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$ untuk suatu c dalam $[a,b]$

Aturan Parabolik: $E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$ untuk suatu c dalam $[a,b]$

Contoh Soal 4.8.2

Berapa besar seharusnya n agar memastikan bahwa nilai mutlak galat lebih kecil dari 0,001 ketika kita menggunakan (a) jumlah Riemann Kanan, (b) metode trapesium, dan (c) metode Parabolik untuk mengestimasi $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$

Jawab:

(a) Nilai mutlak galat untuk jumlah Riemann kanan adalah

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^2}{2n} f'(c)\right| = \left|-\frac{9}{2n}\frac{-1}{c^2}\right| = \frac{9}{2nc^2} \leq \frac{9}{2n(1)^2} = \frac{9}{2n}$$

Agar $|E_n| \leq 0{,}00001$, maka

$$\frac{9}{2n} \leq 0{,}001$$

$$n \geq \frac{9}{2 \cdot 0{,}001} = 4500$$

(b) Nilai mutlak galat untuk aturan trapesium adalah

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^3}{12n^2} f''(c)\right| = \left|-\frac{27}{12n^2}\frac{2}{c^3}\right| = \frac{9}{2n^2c^3} \leq \frac{9}{2n^2(1)^3} = \frac{9}{2n^2}$$

Agar $|E_n| \leq 0{,}00001$, maka

$$\frac{9}{2n^2} \leq 0{,}001$$

$$n^2 \geq \frac{9}{2 \cdot 0{,}001} = 4500$$

$$n \geq \sqrt{4500} \approx 67{,}0820$$

(c) Nilai mutlak galat untuk aturan parabolik adalah

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)\right| = \left|-\frac{3^5}{180n^4}\frac{-24}{c^5}\right| = \frac{162}{5n^4c^5} \leq \frac{162}{5n^4(1)^5} = \frac{162}{5n^4}$$

Agar $|E_n| \leq 0{,}00001$, maka

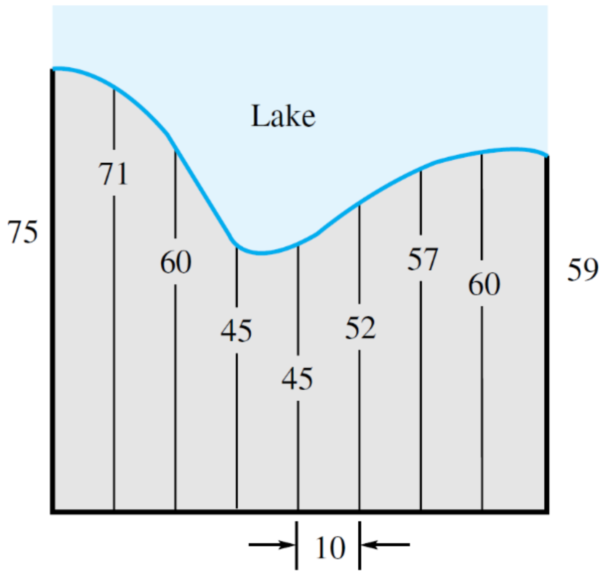
$$\frac{162}{5n^4} \leq 0{,}001$$

$$n^4 \geq \frac{162}{5 \cdot 0{,}001} = 32{,}4$$

$$n \geq \sqrt{32{,}4} \approx 5{,}6921$$

Latihan Soal

1. Diberikan suatu lahan di tepi danau sebagai berikut.



   Taksir luas lahan tersebut menggunakan jumlah Riemann kanan, aturan trapesium, dan aturan parabola.

2. Gunakan jumlah Rimann kanan, aturan trapseium dan aturan parabila dengan $n = 6$ untuk menaksir nilai integral tentu berikut. Tentukan juga suatu batas yang baik untuk galat mutlak dari taksiran yang diperoleh.

   (a) $\displaystyle\int_{1}^{5/2} \frac{1}{x}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{2}{x^2+1}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$

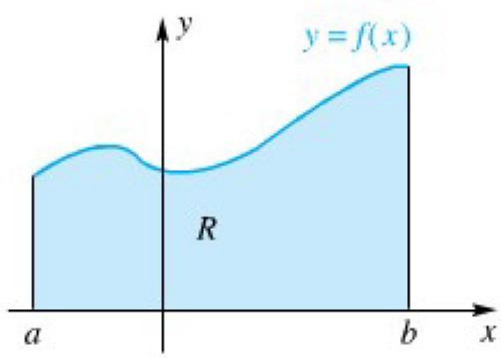
3. Tentukan masing-masing nilai n untuk jumlah Riemann kiri, aturan trapesium, dan aturan parabola untuk menghampiri nilai integral tentu pada soal nomor 2 agar galat mutlak E_n memenuhi $|E_n| \leq 0{,}01$.

BAB 5

PENGGUNAAN INTEGRAL

5.1 Luas Daerah

Pada bagian sebelumnya, kita telah belajar untuk menginterpretasikan integral tentu sebagai "Luas Bertanda". Misalkan $y = f(x)$ suatu kurva di bidang xy dan f kontinu dan tak-negatif di interval $[a, b]$. Misalkan pula R merupakan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$, maka luas daerah R adalah $\int_a^b f(x)\,dx$



Namun demikian, jika kurva $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu x, maka nilai integral di atas akan menjadi negatif, dan tentunya hal ini tidak bisa kita pandang sebagai "luas" yang sebenarnya. Maka dari itu, dalam bagian ini, kita akan coba mempelajari bagaimana menghitung luas daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva secara umum.

Untuk menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva tertentu, kita dapat menggunakan Langkah-langkah berikut

1. Gambarkan daerah yang akan kita hitung luasnya
2. Potong-potong daerah yang akan kita cari luasnya.
3. Taksir luas satu potongan menggunakan luas persegi panjang
4. Jumlahkan luas taksiran dari seluruh potongan
5. Ambil limit Ketika jumlah potongan menuju tak hingga, dan kita akan dapatkan suatu bentuk Integral Tentu

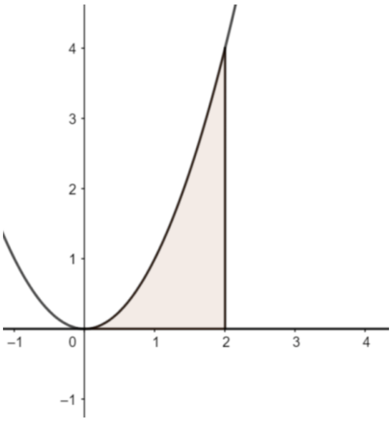
Contoh :https://www.geogebra.org/m/cwwrfrap

Contoh Soal 5.1.1

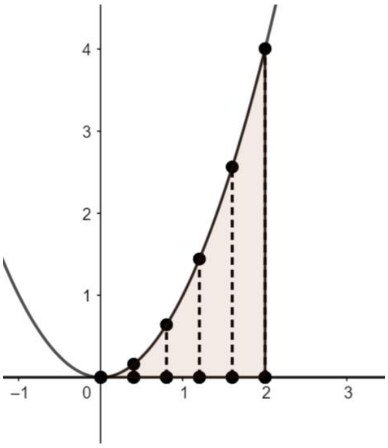
Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, garis $x = 0$ dan garis $x = 2$.

Jawab:

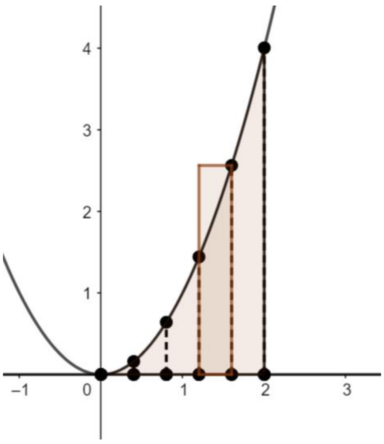
1. Gambar daerah



2. Potongan daerah



3. Taksiran Luas



Luas satu potongan kita taksir dengan menggunakan persegi Panjang dengan alas Δx dan tinggi $f(x)$ sehingga kita peroleh taksiran luas untuk 1 potongan adalah

$$\begin{aligned}\Delta A_i &\approx Alas \cdot Tinggi \\ &= \Delta x \cdot y_i \\ &= y_i \cdot \Delta x \\ &= x_i^2 \cdot \Delta x\end{aligned}$$

4. Jumlahan luas taksiran

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \Delta x$$

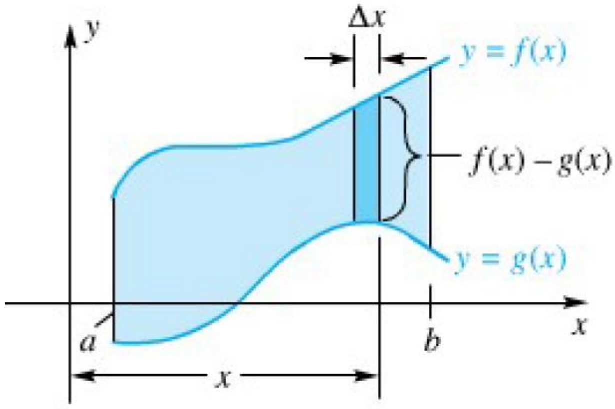
5. Integralkan

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \Delta x$$

$$= \int_0^2 x^2 \, dx$$

Langkah pada contoh di atas dapat kita perumum untuk mencari luas di antara dua kurva. Misalkan kita punya dua kurva yaitu $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ yang memenuhi $f(x) \geq g(x)$ di interval $[a, b]$ seperti pada gambar berikut. Kita ingin menghitung luas daerah yang dibatasi dua kurva yaitu beserta dua garis yaitu $x = a$ dan $x = b$.



Dengan melakukan langkah pada contoh, kita akan dapatkan taksiran luas untuk satu potongan yaitu

$$\Delta A_i \approx [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Langkah berikutnya, kita coba jumlahkan seluruh luas potongan, dan ambil limit tak hingga nya, sehingga kita akan peroleh

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

Contoh Soal 5.1.2

Carilah luas daerah parabola $y^2 = x$ dan garis $y = x - 2$.

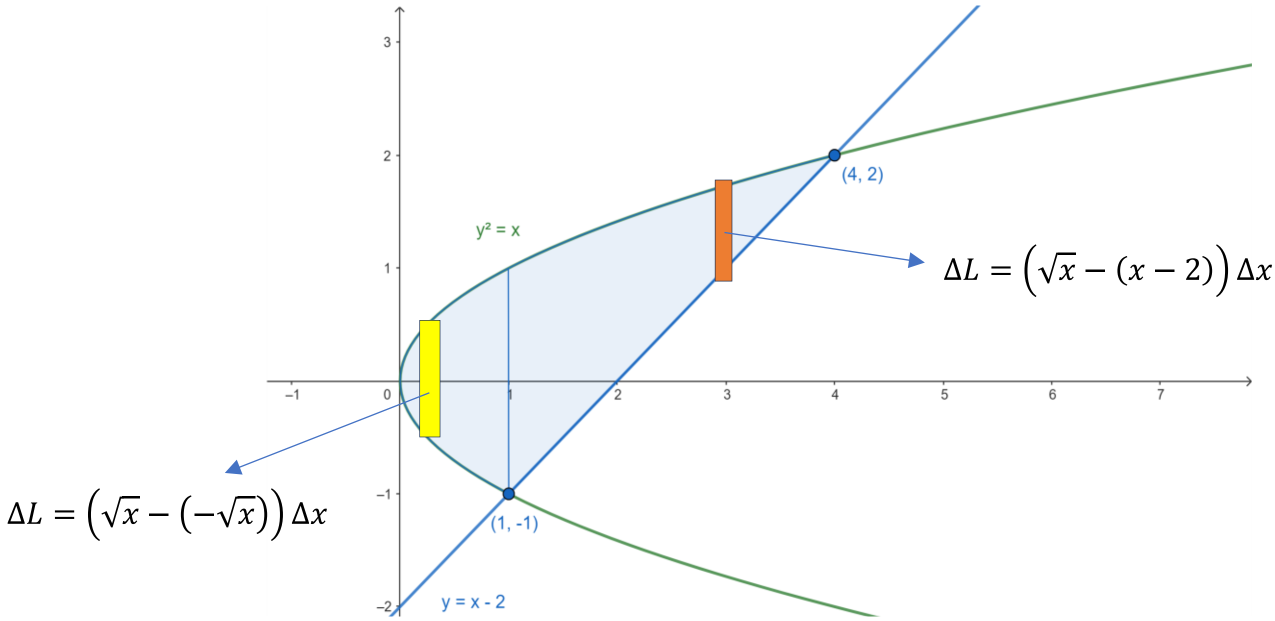
Jawab:

Menentukan titik potong kurva.

$$y = y^2 - 2$$
$$0 = y^2 - y - 2$$
$$0 = (y-2)(y+1)$$
$$y = 2 \text{ atau } y = -1$$

Ketika $y = 2$ diperoleh $x = 4$. Ketika $y = -1$ diperoleh $x = 1$. Titik potongnya $(4,2)$ dan $(1,-1)$.

Potongan Vertikal



Perhatikan bahwa saat mengiris daerah secara tegak didapatkan bahwa untuk $0 \le x \le 1$ batas atas dan batas bawahnya adalah parabola $y^2 = x$. Dengan demikian, untuk $0 \le x \le 1$ memiliki batas atas $y = \sqrt{x}$ dan batas bawah $y = -\sqrt{x}$. Sedangkan, untuk

$1 \le x \le 4$ memiliki batas atas $y = \sqrt{x}$ dan batas bawah $y = x - 1$. Jadi, luas daerah yang dibatasi parabola $y^2 = x$ dan garis $y = x - 2$ adalah

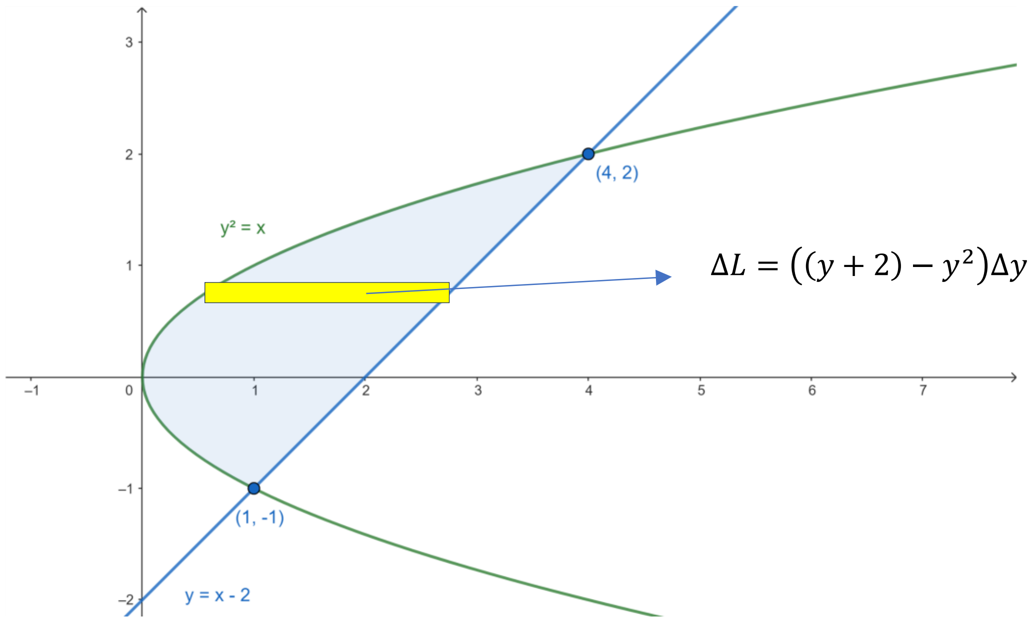
$$L = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right) dx$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x} dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3} x\sqrt{x}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3} - 0 + \left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9}{2}$$

Potongan Horizontal



Perhatikan bahwa saat mengiris daerah secara mendatar didapatkan bahwa untuk $-1 \le y \le 2$ batas kanannya $x = y + 2$ dan batas kirnya $x = y^2$. Jadi, luas daerah yang dibatasi parabola $y^2 = x$ dan garis $y = x - 2$ adalah

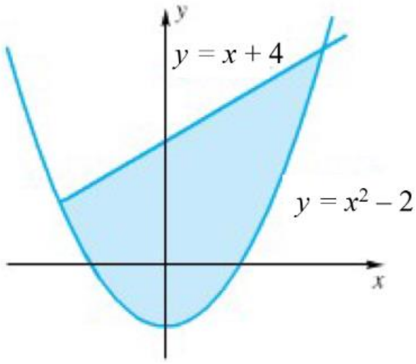
$$L = \int_{-1}^{2} (y+2) - y^2 dy$$

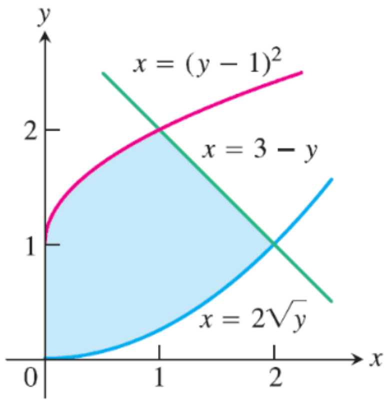
$$= \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Latihan Soal

1) Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut.





2) Untuk masing-masing soal berikut, tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diberikan dengan terlebih dahulu membuat sketsa dari daerah yang dimaksud.

(a) $y = x - 1, y = 5 - x^2, y = 1$

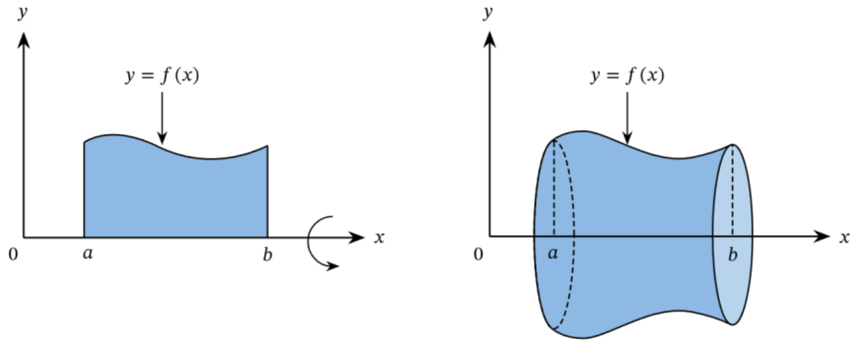
(b) $y = \sqrt{x+1}, y = \sqrt{3-x}, y = 0$

(c) $y = \cos x\,, y = \sin(2x)\,, x = -\frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{\pi}{6}$

(d) $y = x + 6, y = x^3$, dan $2y + x = 0$

5.2 Volume Benda Putar

Benda putar pada dasarnya merupakan suatu objek yang diperoleh dengan memutar suatu kurva terhadap sumbu putar yang berupa garis tertentu.



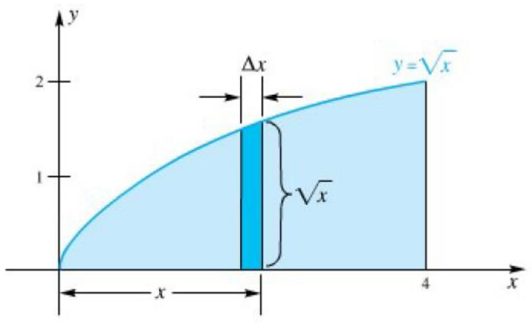
Untuk menghitung volume benda putar, kita dapat gunakan integral tentu. Dalam bagian ini, ada dua metode yang dapat digunakan untuk menghitung volume benda putar yaitu Metode Cakram dan Metode Cincin. Langkah-langkah yang digunakan untuk menghitung volume benda putar kurang lebih akan sama dengan langkah yang digunakan untuk menghitung luas daerah.

Metode Cakram

Ide dari metode ini sebenarnya adalah menghitung volume suatu benda putar dengan memotongnya menjadi beberapa bagian berupa cakram tipis, lalu menghitung jumlah volume cakram tipis tersebut.

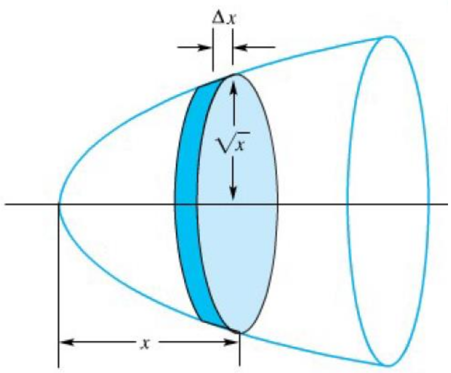
Misalkan kita ingin menghitung volume benda putar yang diperoleh dari memutar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x, $x = 0$, dan $x = 4$ terhadap sumbu x. Langkah yang perlu dilakukan antara lain

1. Gambarkan daerahnya dan potong-potong daerahnya sebanyak n potongan.



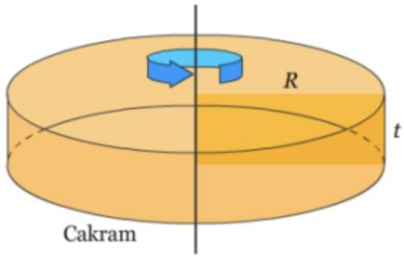
2. Putar potongan daerah terhadap sumbu.

   Tinjau satu potongan yang berwarna biru tua. Ketika kita memutar potongan tersebut terhadap sumbu x, kita akan memperoleh benda mirip cakram seperti pada gambar di bawah



3. Taksiran Volume

   Volume potongan cakram dapat kita taksir dengan menggunakan volume tabung tipis



   Ingat bahwa volume tabung dengan ukuran seperti pada gambar di atas adalah

$$V = \pi R^2 t$$

   dengan R merupakan jari-jari tabung dan t merupakan tinggi tabung.

   Perhatikan bahwa jari-jari potongan cakram adalah sekitar $\sqrt{x}$ dan tinggi potongan cakram dapat kita tuliskan sebagai Δx. Lakukan taksiran dengan rumus di atas, maka kita akan peroleh taksiran volumenya

$$\Delta V \approx \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \Delta x$$

   Untuk potongan cakram ke i, taksiran volumnya dapat kita tulis sebagai

$$\Delta V_i \approx \pi\left(\sqrt{x_i}\right)^2 \Delta x$$

4. Jumlahan Taksiran Volume

$$V \approx \sum_{i=i}^{n} \Delta V_i$$

$$= \sum_{i=i}^{n} \pi\left(\sqrt{x_i}\right)^2 \Delta x$$

5. Integralkan

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=i}^{n} \Delta V_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=i}^{n} \pi\left(\sqrt{x_i}\right)^2 \Delta x$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

Contoh Soal 0.1

Tentukan bolume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ dan sumbu-x terhadap

(a) sumbu-x

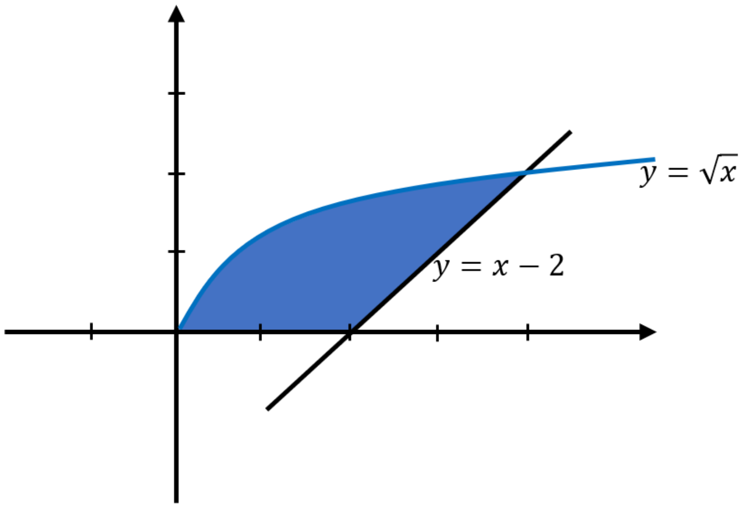
(b) sumbu-y

(c) $x = -1$

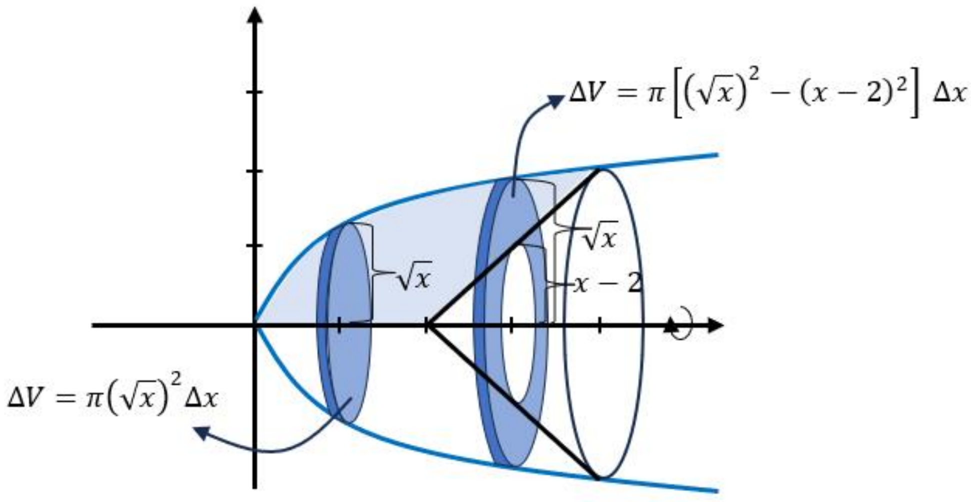
(d) $y = 3$

Jawab:

Gambar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ dan sumbu-x sebagai berikut.

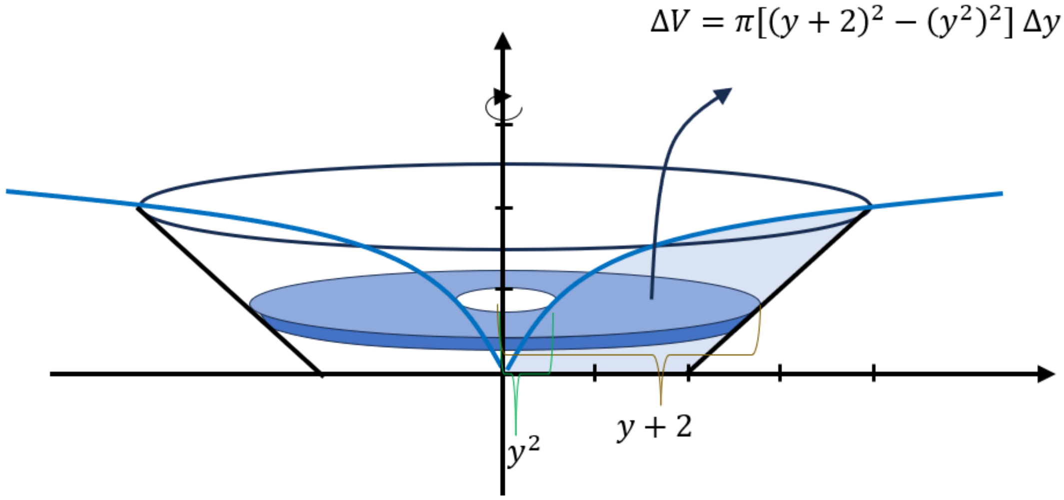


(a) Diputar terhadap sumbu-x



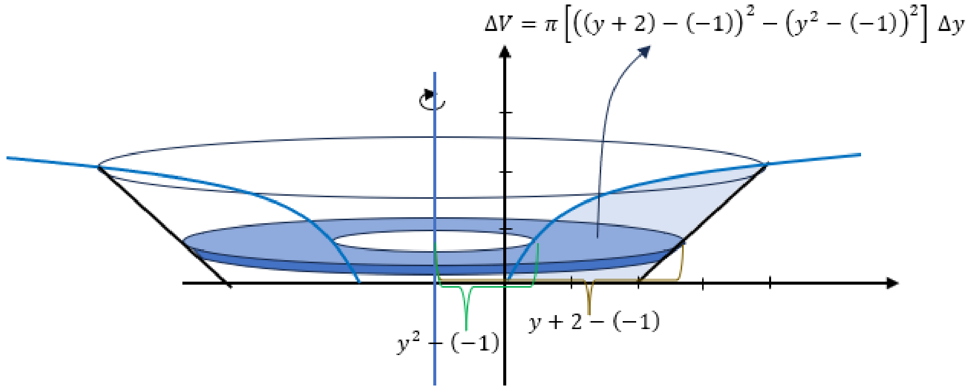
$$V = \int_0^2 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx + \int_2^4 \pi\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x-2)^2\right] dx$$

(b) Diputar terhadap sumbu-y



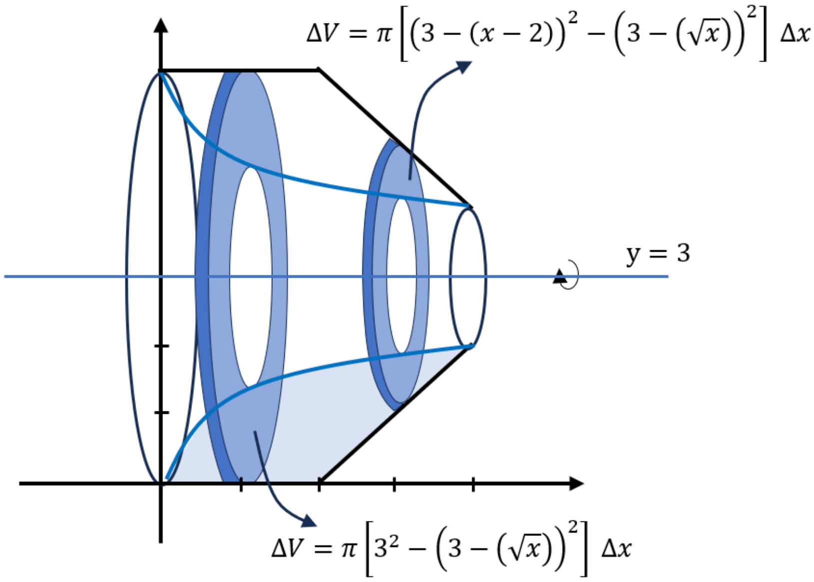
$$V = \int_0^2 \pi[(y+2)^2 - (y^2)^2]dy$$

(c) Diputar terhadap $x = 4$



$$V = \int_0^2 \pi\left[\left((y+2)-(-1)\right)^2 - \left(y^2-(-1)\right)^2\right]dy$$

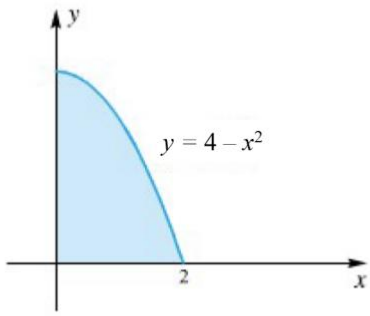
(d) Diputar terhadap $y = 3$



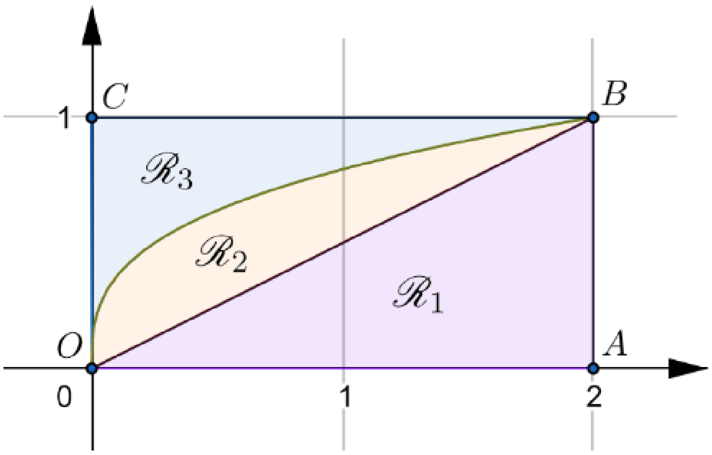
$$V = \int_0^2 \pi\left[3^2 - (3-\sqrt{x})\right]^2 dx + \int_2^4 \pi\left[\left(3-(x-2)\right)^2 - \left(3-\sqrt{x}\right)^2\right]dx$$

Latihan Soal

1) Tentukan volume dari benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diberikan terhadap sumbu yang ditentukan.
   (a) $y = 1 - x^2, y = 0$; terhadap sumbu $- x$
   (b) $x = y^2, x = 2y$; terhadap sumbu $- y$
   (c) $y = |x|, y = 1$; terhadap $x = 1$
   (d) $y = \sqrt{x+1}, y = 1 - x, y = 0$; terhadap $y = -1$
2) Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, sumbu $-$ y dan garis $y = 4$. Hitunglah volume dari benda pejal yang dihasilkan jika daerah S diputar terhadap garis
   (a) $x = 5$
   (b) $x = -3$
   (c) $y = -1$
   (d) $y = 7$
3) Hitunglah volume dari benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah yang diarsir pada gambar di bawah terhadap
   (a) Sumbu x
   (b) Sumbu y
   (c) Garis $y = -1$



4) Dalam gambar berikut, persegi panjang OABC dibagi menjadi tiga daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt[3]{x/2}$ dan garis $y = x/2$. Tentukan volume benda putar yang diperoleh dengan memutar daerah yang diberikan terhadap sumbu putar yang diberikan.



(a) $\mathcal{R}_1$ terhadap BC

(b) $\mathcal{R}_2$ terhadap OA

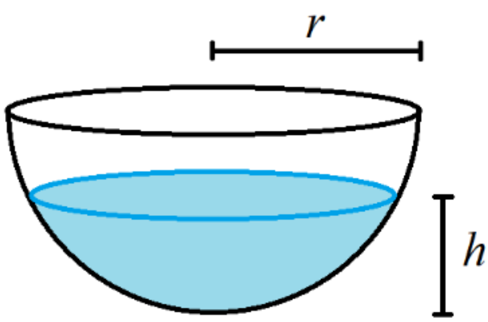
(c) $\mathcal{R}_1$ terhadap OC

(d) $\mathcal{R}_2$ terhadap AB

5) Daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh sumbu-y, kurva $y = \cos(x^2)$, $y = \sin(x^2)$ dan garis $x = \sqrt{\pi/4}$ diputar terhadap sumbu-y. Tentukan volume benda putar yang dihasilkan.

6) Gunakan integral untuk membuktikan bahwa volume kerucut dengan jari-jari r dan tinggi h adalah $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dengan menggunakan (a) metode cakram (b) metode kulit tabung.

7) Suatu wadah berbentuk setengah bola berjari-jari r berisi air sampai ketinggian h.



Buktikan bahwa volume air di dalam wadah tersebut adalah $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

BAB 6

FUNGSI TRANSENDEN

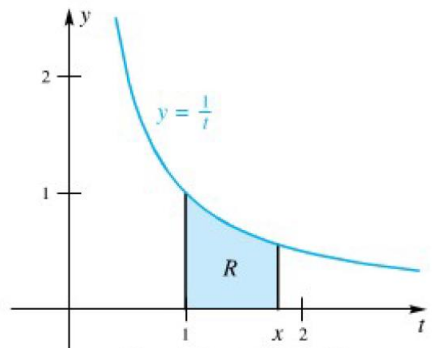
Fungsi Transenden merupakan fungsi dalam matematika yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan aljabar. Ada banyak contoh fungsi transenden, namun yang dibahas di sini hanyalah Fungsi Logaritma Natural dan Fungsi Eksponensial.

6.1 Fungsi Logaritma Natural

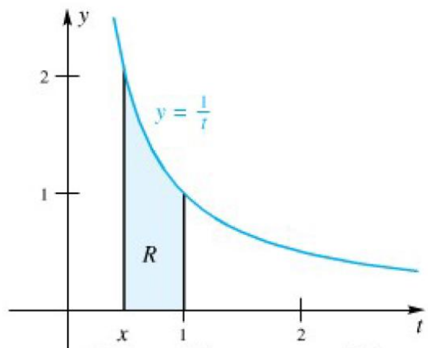
Ekspresi Logaritma Natural dituliskan dalam notasi ln, kita definisikan dengan menggunakan Fungsi Akumulasi berikut

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Secara geometris, Fungsi Logaritma Natural merupakan luas daerah dibawah kurva $y = \frac{1}{t}$ diantara $t = 1$ sampai $t = x$.



If $x > 1$, $\ln x$ = area of R



If $0 < x < 1$, $\ln x = -$ area of R

Domain fungsi Logaritma Natural adalah seluruh bilangan real positif yang dapat dinyatakan dengan Interval $(0, \infty)$.

Turunan Fungsi Logaritma Natural

Misalkan $f(x) = \ln x$, maka dengan menggunakan definisi ln dan Teorema Dasar Kalkulus 1, kita akan dapatkan

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

Perhatikan bahwa, walaupun Turunan dari fungsi $f(x) = \ln x$ adalah $f'(x) = \frac{1}{x}$, namun Anti-Turunan dari fungsi $g(x) = \frac{1}{x}$ bukanlah $G(x) = \ln x$, melainkan

$$G(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Rangkuman Materi 6.1.1

Jika $f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, dengan $x > 0$, maka $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Jika $g(x) = \frac{1}{x}$, dengan $x \neq 0$, maka $G(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

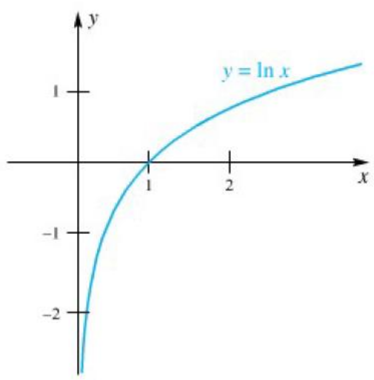
Rangkuman Materi 6.1.2

Sifat Dasar Logaritma Natural

Jika a dan b merupakan bilangan real positif dan r suatu bilangan rasional maka

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a = \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Grafik Fungsi Logaritma Natural



Berdasarkan grafik fungsi di atas, Fungsi Logaritma Natural merupakan fungsi yang selalu monoton naik dan cekung ke bawah.

6.2 Fungsi Eksponensial Natural

Misalkan kita punya persamaan $y = \ln x$. Hubungan antara x dan y juga dapat kita nyatakan dengan ekspresi Eksponensial Natural, yaitu

$$x = \exp y$$

Persamaan di atas juga menyatakan hubungan yang setara antara variabel x dan y.

Dengan menggunakan ekspresi eksponensial, kita juga bisa mendefinisikan suatu fungsi Eksponensial Natural yang biasa dituliskan dalam bentuk

$$f(x) = \exp x = e^x$$

Bilangan e kita sebut sebagai Bilangan Euler yang memenuhi $\ln e = 1$.

Sifat Dasar Eksponensial Natural

Misalkan a dan b suatu bilangan real, maka $e^a e^b = e^{a+b}$ dan $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

Turunan dan Integral dari Fungsi Eksponensial Natural

Misalkan $y = f(x) = e^x$, maka persamaan tersebut ekuivalen dengan $x = \ln y$. Dengan menggunakan turunan implisit, turunkan kedua ruas terhadap x, maka akan diperoleh

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln y)$$

$$1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Sehingga kita peroleh turunan dari Fungsi eksponensial Natural adalah dirinya sendiri yaitu

$$f'(x) = e^x$$

Hal diatas mengakibatkan Anti-Turunan dari Fungsi Eksponensial Natural adalah

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

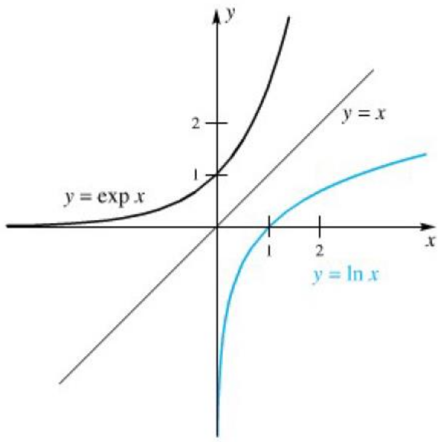
Rangkuman Materi 6.2.1

Sifat Eksponen Natural

Jika a dan b merupakan bilangan

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
3. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
4. $\int e^x dx = e^x + C$

Grafik Fungsi Eksponensial Natural



Berdasarkan grafik fungsi di atas, Fungsi Eksponensial Natural merupakan fungsi yang selalu monoton naik dan cekung ke atas.

6.3 Fungsi Eksponensial dan Logaritma Umum

Ekspresi Eksponensial Natural yang telah kita definisikan sebelumnya ternyata dapat diperumum. Misalkan x dan a suatu bilangan real sembarang dan $a > 0$ maka

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ekspresi diatas adalah perumuman dari Ekspresi Eksponensial Natural. Bilangan a disebut basis eksponensial.

Rangkuman Materi 6.3.1

Sifat Dasar Eksponen

Misalkan $a > 0$, $b > 0$, dan x dan y merupakan bilangan real, maka

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^y$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Turunan dan Integral Fungsi Eksponensial Umum

Rangkuman Materi 6.3.2

Misalkan $a > 0$, maka berlaku

1. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
2. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Selain ekspresi Eksponensial Natural, Logaritma Natural juga dapat kita perumum. Misalkan kita punya persamaan $y = a^x$, maka hubungan x dan y juga dapat kita tulis sebagai

$$x = \log_a y$$

Ekspresi diatas menyatakan Logaritma umum dengan basis bilangan a.

Rangkuman Materi 6.3.1

Sifat Logaritma

Misalkan $a > 0, a \neq 1$, maka

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

1. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log_p b}{\log_p a}, \quad p > 0, p \neq 1$
2. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Latihan Soal

1. Tentukan dy/dx persamaan berikut berikut.
   (a) $y = \ln(4x - 2)$
   (b) $y = x \ln|x^2 - 4|$
   (c) $y = e^{-2x+1}$
   (d) $y = x^\pi - \pi^x$
   (e) $y = \log_3(2x + 1)$
   (f) $y = \int_{e^x}^{x} (2t + 1)\, dt$
   (g) $y = x^{\cos x}$
   (h) $y = \frac{x\sqrt{x-1}e^{2x}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$
   (i) $e^{2xy} + \ln y = 2x$
2. Tentukan integral berikut.
   (a) $\int x\sqrt{3x^2 + 2}dx$
   (b) $\int (x^2 - 1)\cos(x^3 - 3x)\, dx$
   (c) $\int e^{3x} dx$
   (d) $\int \frac{1}{3x+1} dx$
   (e) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5} dx$
   (f) $\int_1^2 x^{-2} e^{\frac{4}{x}}\, dx$

3. Tentukan solusi persamaan diferensial berikut.
   (a) $\frac{dy}{dx} = e^x y^2$
   (b) $\frac{dy}{dx} = ky$, dengan k suatu konstanta dan $y > 0$
   (c) $\frac{dy}{dx} = 2y - 1$, $y > \frac{1}{2}$ dan $y(0) = 3$

DAFTAR PUSTAKA

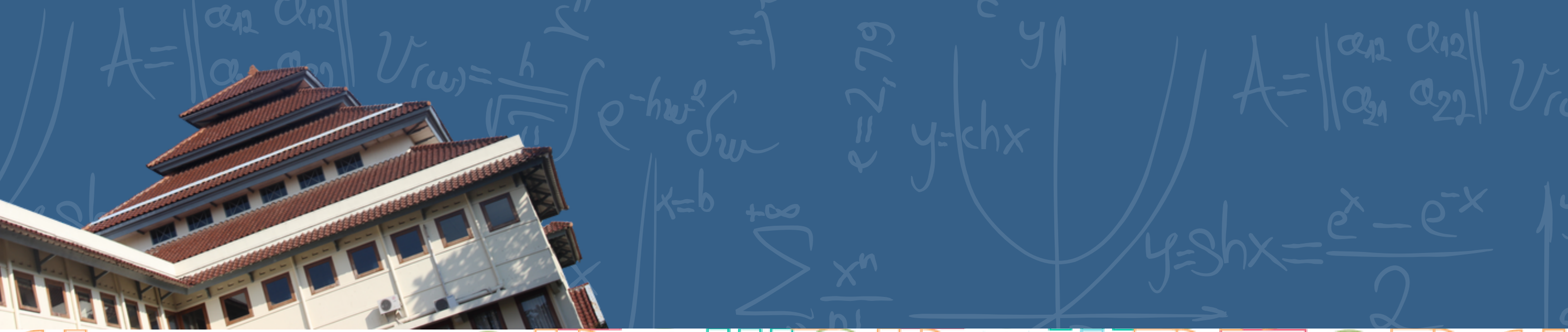
K. Martono, *Kalkulus*, ITB, 1992, edisi 3.

Dale Varberg, Edwin Purcell and Steve Rigdon, *Calculus*, Pearson, 2007, 9th ed.

J. R. Hass, C. E. Heil, and M. D. Weir, *Thomas' Calculus*, Pearson Education, 2018, 14th ed.

Soal Tutorial MA1101 Matematika 1A Tahun 2022-2023

Soal Tutorial MA1101 Matematika 1A Tahun 2023-2024



Keberhasilan itu bukanlah selalu milik orang yang pintar

Namun keberhasilan itu ialah milik orang yang senantiasa berusaha